

高中数学竞赛专题讲座

丛书策划 李胜宏
丛书主编 陶平生 苏建一
刘康宁 边红平

SANJIAO HANSHU

# 三角函数

本书主编 沈虎跃

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座. 三角函数 / 陶平生等主编.
杭州:浙江大学出版社,2007.6
ISBN 978-7-308-05235-1

Ⅰ.高… Ⅱ.陶… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第039719号

**三角函数**

**本书主编　沈虎跃**

责任编辑　杨晓鸣
出版发行　浙江大学出版社
(杭州天目山路148号　邮政编码310028)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　杭州杭新印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　10
印　　数　00001—10000
字　　数　200千
版 印 次　2007年6月第1版　2007年6月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-05235-1
定　　价　13.00元



浙江大学出版社发行部邮购电话　(0571)88072522

# 丛书编委会

# 编写说明

影响最大、级别最高的中学生“国际数学奥林匹克”(简称IMO)由来已久,自第1届IMO于1959年在罗马尼亚举行以来,有近50年的历史,其影响越来越广泛。在“国际数学奥林匹克”的推动下,世界各地的数学竞赛活动如火如荼。目前,我国数学竞赛逐步形成了从全国联合竞赛、全国中学生数学冬令营到国家集训队一个完整的竞赛选拔体系。

数学竞赛作为一项智力活动,吸引了无数数学爱好者积极参与,也为那些对数学有浓厚兴趣和有数学天赋的学生提供了一个展示自我的平台,是发现和培养数学人才的一条有效渠道。我们欣喜地看到,通过这项活动,发现了一批数学苗子,培养了一批数学人才。许多参与竞赛的优秀选手后来都成了杰出的数学家。

总体看来,我国的数学竞赛体制日趋完善,它的一些功能和作用也日益凸显。随着高校招生制度的改革,各种学科竞赛,尤其是数学竞赛的选拔功能越来越被广大高校所认可。事实上,学科竞赛已经成为高校自主招生和选拔人才的重要途径之一。

我们本着为数学竞赛的普及、提高做点有益事情的愿望,在全国范围内组织一批长期从事数学竞赛且做出杰出成绩的一线专家编写了一套“高中数学竞赛专题讲座丛书”。丛书包括《初等数论》、《函数与函数方程》、《复数与多项式》、《不等式》、《组合问题》、《排列组合与概率》、《数列与归纳法》、《集合与简易逻辑》、《三角函数》、《立体几何》、《平面几何》、《解析几何》和《数学结构思想及解题方法》13种。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本数学思想、方法,凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是:

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题,通过对典型例题的解剖,传

授数学思想方法，侧重培养学生的逻辑思维能力，不唯解题而解题；

2. 本着少而精的原则选择材料，不搞题海战术，不追求大而全，而是以点带面，举一反三；

3. 以数学修养和能力培养为立意，通过深刻剖析问题的数学背景，挖掘数学内涵，培养学生的数学品格和解决实际问题的能力；

4. 在注重基础知识训练同时，有适当程度的深化，对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有一定的指导作用和参考价值。

丛书由浙江大学数学系教授、博士生导师、全国数学奥林匹克竞赛领队李胜宏策划；丛书由陶平生、苏建一、刘康宁、边红平主编；参加编写的成员是：陶平生、苏建一、刘康宁、边红平、黄军华、王建中、岑爱国、韦吉珠、张雷、王俊明、李世杰、沈虎跃、斯理炯、虞金龙、马洪炎。

鉴于我们的水平有限，书中的不妥之处敬请读者批评指正。

# 前　　言

经过几个月的艰苦努力，书稿终于即将付梓出版，内心还是忐忑不安。古往今来，关于三角函数的书籍可谓汗牛充栋，直接针对中学生数学奥林匹克的也不在少数，大多是体系严密，行文也较相似，要在此基础上再有所创新对我而言是个不小的困难。几易书稿，最终放弃严密的体系，以我平时在数学兴趣小组的讲义为蓝本，同时揣摩近年来国内外的各级各类竞赛中三角函数问题的构造方式及其各种解法的来由终成此书，不知当否？问题的构造与解法本身就是相辅相成的，构造问题的本身就给出了一种解法，一个好的解法又可以拓广问题，从另一个角度构造问题。在本书中所构造的问题，如果没有给出解法，读者只要从构造本身入手即可解决，当然您从另外的角度去考察问题那就更好了。由于本书是以我平时在数学兴趣小组的讲义为蓝本的，期间参考了一些文献中的解法，但具体的文献没法找到，在此一并感谢！

本书的编写出版，非常感谢裘宗沪先生一直以来的关心和支持，祝他健康长寿！感谢李胜宏教授的指导；感谢我的师父许克用先生在百忙之中通阅了全稿并提出许多改进意见；感谢我的学生沈才立、周晨璐、王崇理、支持等同学，他们向我提供了许多问题的独特想法和精彩解法；感谢我的夫人滕丽女士在生活上无微不至的照顾和精神上的鼓励。

沈虎跃

2007 年 3 月于镇海

# 目　录

第一章　三角函数问题的构造 …… (1)
§1.1　演　绎 …… (1)
§1.1.1　递推形式的等式 …… (5)
§1.1.2　直接化简变形裂项式 …… (7)
§1.1.3　将三角形式转化为反三角形式 …… (7)
§1.1.4　从复数中产生 …… (8)
§1.2　单位圆 …… (16)
§1.3　复数与方程 …… (26)
§1.3.1　复数的恒等变形 …… (26)
§1.3.2　方程与根 …… (30)
§1.4　变　换 …… (38)
§1.4.1　变换命题的叙述方式 …… (39)
§1.4.2　变换命题的题设与结论 …… (55)
第二章　三角函数问题的求解 …… (61)
§2.1　三角恒等关系(一) …… (61)
§2.2　三角恒等关系(二) …… (75)
§2.2.1　基本恒等式 …… (75)
§2.2.2　三角形中常见恒等式 …… (78)
§2.2.3　一些三角形内恒等变形问题的求解 …… (81)
§2.3　三角不等关系与最值(一) …… (85)
§2.4　三角不等关系与最值(二) …… (101)
§2.4.1　简单的三角形内三角不等关系与最值 …… (101)
§2.4.2　进一步的三角形内三角不等关系与最值 …… (106)
第三章　习题训练 …… (127)
参考答案 …… (131)

# 第一章 三角函数问题的构造

数学问题的构成方式很多，有以一些已知的真命题或一组条件出发进行逻辑推理，达到构造数学问题的，也有在原有命题的基础上通过变换条件、结论或推广或弱化原命题来构造数学问题的，还有利用独具匠心的设计来构造数学问题，以及一些来源于现实生活或学习工作中的问题等等。三角函数产生于几何，溶入于代数，应用极为广泛，这为构造三角函数问题提供了广阔的空间。本章从几个常见的角度考察三角函数问题的构造，而构造问题的本身就已经提供了这个问题的一种证明或解决方法。当然这样的问题还可能存在其他的解法，为了顾及读者的阅读习惯，我们将其他解法以注的形式给出。

## §1.1 演 绎

构造命题的演绎法一般是从已知的真命题或一组条件出发，进行逻辑推理，不断地推理出结论，从中进行有效地筛选，保留有用部分，有时还要对原来的推理道路作一定的掩盖。这样一种构造命题方式，由于各人的知识、阅历、推理的方法和角度各异，构造的命题难度差异很大，但不论难易程度如何，一般这类命题都具有一定的独创性。

**例 1** 考虑三角恒等式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

(1)两边同除 $\cos^2\alpha$ 或 $\sin^2\alpha$ 得题：

求证：$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$，$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$.

(2)移项，因式分解得题：

求证：$\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.





(3)对(2)运用合分比定理得题：

求证：$\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}$；

求证：$\dfrac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha-1}{1-\sin\alpha-\cos\alpha}$.

(4)由于$\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\cot\dfrac{\alpha}{2}$，得题：

求证：$\dfrac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}=\cot\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha-1}{1-\sin\alpha-\cos\alpha}$.

(5)对(2)中两边平方得题：

求证：$\dfrac{\sin^2\alpha}{2-2\cos\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{2+2\cos\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

(6)由于$1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$，$1+\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$，得题：

求证：$\dfrac{\sin^2\alpha}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\alpha}=\dfrac{4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

(7)对(6)进行变形，得题：

求证：$(2\sin\alpha+\sin^2\alpha)^2-4(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2})^2\cdot\sin^2\alpha=\sin^4\alpha$.

**例2** 考虑恒等式 $\sin3\alpha\sin^3\alpha+\cos3\alpha\cos^3\alpha=\cos2\alpha$.

(1)令$\alpha=\dfrac{\pi}{12}$，求$\sin3\alpha\sin^3\alpha+\cos3\alpha\cos^3\alpha$的值(答：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$).

(2)令$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，得题：

已知$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，求$\sin3\alpha\sin^3\alpha+\cos3\alpha\cos^3\alpha$的值(答：$-\dfrac{7}{9}$).

(3)由于$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$，得题：

求证：$\sin3\alpha\sin^3\alpha+\cos3\alpha\cos^3\alpha=2\cos^2\alpha-1$.

(4)由于$\cos2\alpha=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$，得题：

求证：$\sin3\alpha\sin^3\alpha+\cos3\alpha\cos^3\alpha=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$.

(5)由于$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$，$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$，得题：

求证：$3\sin^4\alpha-3\cos^4\alpha-4\sin^6\alpha+4\cos^6\alpha=\cos2\alpha$.

(6)由于$\sin3\alpha=4\sin\alpha\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{3})\sin(\dfrac{\pi}{3}-\alpha)$，$\cos3\alpha=4\cos\alpha\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{3})\cos(\dfrac{\pi}{3}-\alpha)$得



题：

求证：$4\sin^2\alpha\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)+4\cos^2\alpha\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{3}-\alpha)=\cos2\alpha$.

**例3** 考虑恒等式

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+d)+\cdots+\sin[\alpha+(n-1)d]=\frac{\sin(\alpha+\frac{n-1}{2}d)\cdot\sin\frac{n}{2}d}{\sin\frac{d}{2}}.$$

(1)令 $d=\alpha$，得题：

求证：$\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+\cdots+\sin n\alpha=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\cdot\sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$；

(2)令 $d=2\alpha$，得题：

求证：$\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\cdots+\sin(2n-1)\alpha=\dfrac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}$；

(3)在(1)中用 $2\alpha$ 代替 $\alpha$，得题：

求证：$\sin2\alpha+\sin4\alpha+\sin6\alpha+\cdots+\sin2n\alpha=\dfrac{\sin(n+1)\alpha\sin n\alpha}{\sin\alpha}$；

(4)令 $\alpha=d=\frac{\pi}{n}$，得题：

求证：$\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi=\cot\frac{\pi}{2n}$；

(5)令 $\alpha=\frac{2\pi}{n}$，$d=\frac{\pi}{n}$，得题：

求证：$\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n+1}{n}\pi=\dfrac{\cos\frac{3}{2n}\pi}{\sin\frac{\pi}{2n}}$；

(6)在(4)中对 $n$ 赋值，可得下面一系列题：

①求证：$\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{3\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}=\cot\frac{\pi}{10}$.

②求证：$\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2}{7}\pi+\sin\frac{3}{7}\pi+\sin\frac{4}{7}\pi+\sin\frac{5}{7}\pi+\sin\frac{6}{7}\pi=\cos\frac{\pi}{14}$.

③求证：$\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{2}{5}\pi=\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{10}$.

④求证：$\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2}{7}\pi+\sin\frac{3}{7}\pi=\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{14}$.



⑤已知 $\cot\frac{\pi}{2007}=a$，求 $\sin\frac{\pi}{2007}+\sin\frac{2\pi}{2007}+\cdots+\sin\frac{1003\pi}{2007}$ 的值，

(答：$\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{2}$)

(7)用 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 代替 $\alpha$，$-d$ 代替 $d$，得题：

求证：$\cos\alpha+\cos(\alpha+d)+\cdots+\cos[\alpha+(n-1)d]=\dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{n-1}{2}d\right)\sin\frac{n}{2}d}{\sin\frac{d}{2}}$；

(8)在(7)中令 $d=\alpha$，得题

求证：$\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\dfrac{\cos\frac{n+1}{2}\alpha\cdot\sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$；

(9)在(8)中用 $2\alpha$ 代替 $\alpha$，得题：

求证：$\cos2\alpha+\cos4\alpha+\cos6\alpha+\cdots+\cos2n\alpha=\dfrac{\cos(n+1)\alpha\cdot\sin n\alpha}{\sin\alpha}$；

(10)在(7)中，令 $d=2\alpha$，得题：

求证：$\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\cdots+\cos(2n-1)\alpha=\dfrac{\cos n\alpha\cdot\sin n\alpha}{\sin\alpha}$；

(11)在(7)中，令 $\alpha=d=\frac{\pi}{n}$，得题：

求证：$\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2}{n}\pi+\cos\frac{3}{n}\pi+\cdots+\cos\frac{n-1}{n}\pi=0$；

(12)由(2)、(3)可得题

求证 $\dfrac{\sin2\alpha+\sin4\alpha+\sin6\alpha+\cdots+\sin2n\alpha}{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\cdots+\sin(2n-1)\alpha}=\dfrac{\sin(n+1)\alpha}{\sin n\alpha}$；

(13)由(9)、(10)可得题：

求证 $\dfrac{\cos2\alpha+\cos4\alpha+\cos6\alpha+\cdots+\cos2n\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\cdots+\cos(2n-1)\alpha}=\dfrac{\cos(n+1)\alpha}{\cos n\alpha}$；

(14)由(2)、(10)可得题.

求证 $\dfrac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\cdots+\sin(2n-1)\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\cdots+\cos(2n-1)\alpha}=\tan n\alpha$；

(15)在(14)中令 $n=3$，得题

求证 $\dfrac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha}=\tan3\alpha$；

(16)由 $(2)^2+(10)^2$ 可得题



求证 $[\sin\alpha+\sin3\alpha+\cdots+\sin(2n-1)\alpha]^2+[\cos\alpha+\cos3\alpha+\cdots+\cos(2n-1)\alpha]^2=\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2\alpha}$，

(17)由(2)-(3)可得题

$\sin\alpha-\sin2\alpha+\sin3\alpha-\sin4\alpha+\cdots+\sin(2n-1)\alpha-\sin2n\alpha=\frac{\sin n\alpha[\sin n\alpha-\sin(n+1)\alpha]}{\sin\alpha}$；

(18)由(10)-(9)可得题

$\cos\alpha-\cos2\alpha+\cos3\alpha-\cos4\alpha+\cdots+\cos(2n-1)\alpha-\cos2n\alpha$

$=\frac{\sin n\alpha[\cos n\alpha-\cos(n+1)\alpha]}{\sin\alpha}$；

(19)由(17)、(18)我们可以构造下列题

①求值：$\sin80^\circ-\cos62^\circ+\cos82^\circ-\sin44^\circ-\cos26^\circ$。

(答：0)

②求值：$\cos\frac{\pi}{11}-\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}-\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}$

(答：$\frac{1}{2}$)

**注** 我们在例1、例2均通过对一个已知的恒等式进行转化演绎，而在例3中是对一个关于$n$的恒等式进行特殊化赋值或重新组合等方式进行演绎，这就要求我们掌握更多的恒等式．那么，这些恒等式又源于何处呢？我们可以从以下几个方面来考虑．

### §1.1.1 递推形式的等式

对于求和(或求积)而言，能裂项相消是再好不过了．其实我们平时看到的很多平凡的式子都具有裂项相消的功能，举例说明之．

**例1** 积化和差公式

$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]=\frac{1}{2}[\sin(\beta+\alpha)-\sin(\beta-\alpha)]$

将$\beta$看成一个关于$n$的函数，即有：$\sin\alpha\cos\beta_n=\frac{1}{2}[\sin(\beta_n+\alpha)-\sin(\beta_n-\alpha)]$，

$\sin\alpha\cos\beta_{n+1}=\frac{1}{2}[\sin(\beta_{n+1}+\alpha)-\sin(\beta_{n+1}-\alpha)]$，

再令$\beta_{n+1}-\alpha=\beta_n+\alpha$，即$\beta_{n+1}=\beta_n+2\alpha$，这样积化和差公式就有裂项相消的功能了．即取$\beta_n=\beta_1+(n-1)\cdot2\alpha$，则

$\cos\beta_1+\cos\beta_2+\cdots+\cos\beta_n=\frac{\sin(\beta_n+\alpha)-\sin(\beta_1-\alpha)}{2\sin\alpha}$.





同样：$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]=\frac{1}{2}[\cos(\beta-\alpha)-\cos(\beta+\alpha)]$.

我们取 $\beta_n=\beta_1+(n-1)\cdot 2\alpha$，则

$$\sin\beta_1+\sin\beta_2+\cdots+\sin\beta_n=\frac{\cos(\beta_1-\alpha)-\cos(\beta_n+\alpha)}{2\sin\alpha}.$$

**例 2** 考虑等式 $\cot x-\frac{1}{\sin 2x}=\cot 2x$.

将上述等式变形得 $\cot x-\cot 2x=\frac{1}{\sin 2x}$，故 $\frac{1}{\sin 2^{k+1}x}=\cot 2^k x-\cot 2^{k+1}x, k\in\mathbf{N}$. 这是一个具有裂项相减功能的递推式.逐项迭代即有：

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\frac{1}{\sin 8x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot x-\cot 2^n x.$$

也可以写成

$$\csc 2x+\csc 4x+\csc 8x+\cdots+\csc 2^n x=\cot x-\cot 2^n x.$$

**例 3** 考虑等式 $\cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}=2\cot x$. 也可将它变形为具有裂项相消功能的递推式：$\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}-\cot x=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}$.

故 $\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{x}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{x}{2^{k+1}}-\frac{1}{2^k}\cot\frac{x}{2^k}, k\in\mathbf{N}$.

可得恒等式：

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{4}+\frac{1}{2^3}\tan\frac{x}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x.$$

**例 4** 考虑三倍角公式 $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$.

首先将之变形 $3\sin\alpha-\sin 3\alpha=4\sin^3\alpha$，即 $\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha)=\sin^3\alpha$.

写成递推裂项式：$3^k\sin^3\frac{\alpha}{3^k}=\frac{1}{4}\left(3^{k+1}\sin\frac{\alpha}{3^{k+1}}-3^k\sin\frac{\alpha}{3^k}\right), k\in\mathbf{N}$.

这样可得等式：

$$\sin^3\frac{\alpha}{3}+3\sin^3\frac{\alpha}{3^2}+\cdots+3^{n-1}\sin^3\frac{\alpha}{3^n}=\frac{1}{4}\left(3^n\sin\frac{\alpha}{3^n}-\sin\alpha\right).$$

**例 5** 考虑二倍角正弦公式 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

首先变形得 $\cos\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$，将之写成递推裂项式

$$\cos 2^k\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{\sin 2^k\alpha}, k\in\mathbf{N}$$

这样可得等式：



$\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha\cdots\cos2^n\alpha=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin2^{n+1}\alpha}{\sin\alpha}$.

**例 6** 考虑二倍角余弦公式 $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$.

首先变形得：$2\cos2\alpha+1=4\cos^2\alpha-1=(2\cos\alpha+1)(2\cos\alpha-1)$，

将之写成递推裂项式 $2\cos2^k\alpha-1=\frac{2\cos2^{k+1}\alpha+1}{2\cos2^k\alpha+1}$，$k\in N$.

这样可得等式：$(2\cos\alpha-1)(2\cos2\alpha-1)(2\cos4\alpha-1)\cdots(2\cos2^{n-1}\alpha-1)=\frac{2\cos2^n\alpha+1}{2\cos\alpha+1}$

### §1.1.2 直接化简变形裂项式

有时我们也可对具有裂项相消功能的式子进行变形，从而构造恒等式或不等式.

**例 7** $\tan(n+1)^\circ-\tan n^\circ=\frac{\sin(n+1)^\circ}{\cos(n+1)^\circ}-\frac{\sin n^\circ}{\cos n^\circ}=\frac{\sin(n+1)^\circ\cos n^\circ-\cos(n+1)^\circ\sin n^\circ}{\cos n^\circ\cdot\cos(n+1)^\circ}$

$$=\frac{\sin1^\circ}{\cos n^\circ\cdot\cos(n+1)^\circ}.$$

这样可以构造等式：

$\frac{1}{\cos0^\circ\cos1^\circ}+\frac{1}{\cos1^\circ\cos2^\circ}+\frac{1}{\cos2^\circ\cos3^\circ}+\cdots+\frac{1}{\cos n^\circ\cos(n+1)^\circ}=\frac{\tan(n+1)^\circ}{\sin1^\circ}$ $(0\leqslant n\leqslant 88, n\in N)$.

特别地取 $n=44$，及 $n=88$ 得

$$\frac{1}{\cos0^\circ\cos1^\circ}+\frac{1}{\cos1^\circ\cos2^\circ}+\frac{1}{\cos2^\circ\cos3^\circ}+\cdots+\frac{1}{\cos44^\circ\cos45^\circ}=\csc1^\circ,$$

$$\frac{1}{\cos0^\circ\cos1^\circ}+\frac{1}{\cos1^\circ\cos2^\circ}+\frac{1}{\cos2^\circ\cos3^\circ}+\cdots+\frac{1}{\cos88^\circ\cos89^\circ}=\frac{\cos1^\circ}{\sin^21^\circ}.$$

**例 8** $\frac{\cos(30^\circ-n^\circ)}{\cos n^\circ}=\frac{\cos30^\circ\cos n^\circ+\sin30^\circ\sin n^\circ}{\cos n^\circ}=\cos30^\circ+\sin30^\circ\tan n^\circ$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\tan n^\circ)$$

我们如果取遍 $n=1,2,3,\cdots,29$，则 $30-n$ 也恰好取遍 $1,2,3,\cdots,29$.

这样我们有：$(\sqrt{3}+\tan1^\circ)(\sqrt{3}+\tan2^\circ)\cdots(\sqrt{3}+\tan29^\circ)=2^{29}$.

### §1.1.3 将三角形式转化为反三角形式

**例 9** 考虑等式 $\frac{(2k+1)-(2k-1)}{1+(2k+1)(2k-1)}=\frac{1}{2k^2}$ 与三角公式 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ 相似.

我们可将它写成反正切函数形式 $\arctan\frac{1}{2k^2}=\arctan(2k+1)-\arctan(2k-1)$，$k\in$

$\mathbf{N}^*$.

这样我们就有恒等式：

$$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{8}+\arctan\frac{1}{18}+\cdots+\arctan\frac{1}{2\cdot n^2}=\arctan(2n+1)-\arctan 1$$

同样我们考虑恒等式：

$$\frac{\frac{k}{k+1}-\frac{k-1}{k}}{1+\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k-1}{k}}=\frac{1}{2k^2}.$$

将它写成反正切函数形式：

$$\arctan\frac{1}{2k^2}=\arctan\frac{k}{k+1}-\arctan\frac{k-1}{k},k\in\mathbf{N}^*$$

也可得恒等式：

$$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{8}+\arctan\frac{1}{18}+\cdots+\arctan\frac{1}{2\cdot n^2}=\arctan\frac{n}{n+1}.$$

**例 10** 考虑下面式子：$\frac{1}{k}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{k+1}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{1}{k}\right)^2}\cdot\frac{1}{k+1}=\frac{\sqrt{(k+1)^2-1}}{k(k+1)}-\frac{\sqrt{k^2-1}}{k(k+1)}=\frac{\sqrt{(k+1)^2-1}-\sqrt{k^2-1}}{k(k+1)}$.

将它写成反正弦函数的形式有：

$$\arcsin\frac{\sqrt{(k+1)^2-1}-\sqrt{k^2-1}}{k(k+1)}=\arcsin\frac{1}{k}-\arcsin\frac{1}{k+1},$$

可得如下恒等式：

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{6}+\arcsin\frac{\sqrt{15}-\sqrt{8}}{12}+\cdots+\arcsin\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}-\sqrt{n^2-1}}{n(n+1)}$$

$$=\arccos\frac{1}{n+1}.$$

（提示：上式 $=\arcsin 1-\arcsin\frac{1}{n+1}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{n+1}=\arccos\frac{1}{n+1}$）

### §1.1.4 从函数中产生

**例 1** 考查不等式 $\sin x\leqslant x\leqslant\tan x,x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，当且仅当 $x=0$ 时取"="．

(1)赋予 $x$ 特殊值，可得题：

①求证 $\sin 20^\circ<\frac{7}{20}$.（提示：$\sin 20^\circ=\sin\frac{\pi}{9}<\frac{\pi}{9}<\frac{7}{20}$）



②求证：$\tan10°>\frac{17}{100}$.（提示：$\tan10°=\tan\frac{\pi}{18}>\frac{\pi}{18}>\frac{17}{100}$）

(2)考查函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 的单调性，得题：

求证：$f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上是单调递减的函数.

（提示：$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0$）

(3)对(2)限制 $x$ 的取值范围，得题：

①已知 $0<x<\frac{\pi}{4}$，求证：$\sin x>\frac{2\sqrt{2}}{\pi}x$.（提示：$f(x)>f(\frac{\pi}{4})$）

②已知 $0<x<\frac{\pi}{2}$，求证：$\sin x>\frac{2}{\pi}x$（提示：$f(x)>f(\frac{\pi}{2})$）

(4)由(3)中②可知，对于锐角△$ABC$，均有 $\sin A>\frac{2}{\pi}A$、$\sin B>\frac{2}{\pi}B$、$\sin C>\frac{2}{\pi}C$，得题：

在锐角△$ABC$ 中，求证：$\sin A+\sin B+\sin C>2$.

(5)当 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$\cos\alpha\in(0,1)\subseteq(0,\frac{\pi}{2})$，得题：

设 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$a=\cos\alpha$，$b=\sin(\cos\alpha)$，$c=\cos(\sin\alpha)$，试将 $a$、$b$、$c$ 从小到大排列.

（答：$b<a<c$）

(6)考查函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 的凸凹性，得题：

求证：函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 是凹函数.

（提示：$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，$f''(x)=\frac{2\sin x-x^2\sin x-2x\cos x}{x^3}$，令 $g(x)=2\sin x-x^2\sin x-2x\cos x$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $g'(x)=-x^2\cos x<0$. 故 $g(x)<g(0)=0$，所以 $f''(x)<0$）

(7)利用(6)及 Jensen 不等式可得题：

在锐角△$ABC$ 中，求证：$\frac{\sin A}{A}+\frac{\sin B}{B}+\frac{\sin C}{C}\leqslant\frac{9\sqrt{3}}{2\pi}$.

(8)由(5)可得题

设 $\alpha$、$\beta$ 分别是方程 $\cos(\sin x)=x$ 和 $\sin(\cos x)=x$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的解，试比较 $\alpha$、$\beta$





的大小.

(答:$\alpha>\beta$)

(提示 反证法,假设 $\alpha\leqslant\beta$,则 $\beta=\sin(\cos\beta)<\cos\beta\leqslant\cos\alpha<\cos(\sin\alpha)=\alpha$,矛盾)

(9)考虑它们的反函数,得题:

求证:$\arctan x\leqslant x\leqslant\arcsin x$,$x\in[0,1]$,当且仅当 $x=0$ 时取"="

(10)利用(9)及均值不等式,又可得题.

若 $x>0$,求证:$\left(\frac{1}{x}+x\right)^2\cdot\arctan x>\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(提示:令 $\theta=\arctan x$,则 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\left(\frac{1}{x}+x\right)^2\cdot\arctan x$

$$=(\cot\theta+\tan\theta)^2\cdot\theta>\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)^2\cdot\sin\theta=\frac{1}{\sin\theta\cos^2\theta}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\cdot2\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta\cdot\cos^2\theta}}$$

$$\geqslant\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta}{3}\right)^3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$)

(11)由于 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,及 $\cos\alpha>\cos^2\alpha\left(\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$,得题:

已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,求证:$\alpha\cdot\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

**例 2** 考查不等式,设 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$0<\beta<\frac{\pi}{2}$,若 $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$,则 $\tan\alpha\tan\beta\leqslant\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}$;若 $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$,则 $\tan\alpha\tan\beta\geqslant\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}$,当且仅当 $\alpha=\beta$ 时取"=".

(1)对 $\alpha+\beta$ 赋予特殊值,得题:

①已知锐角 $\alpha$、$\beta$ 满足 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$,求 $\tan\alpha\tan\beta$ 的最大值.

(答:$\frac{1}{3}$)

②已知锐角 $\alpha$、$\beta$ 满足 $\alpha+\beta=\frac{2}{3}\pi$,求 $\tan\alpha\tan\beta$ 的最小值

(答:3)

(2)将原不等式变形后,可得题:

已知 $\beta\in\left(0,\frac{5}{12}\right)$,求 $\cot\beta\cdot\tan^2\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\beta}{2}\right)$ 的最小值.

(答:$2-\sqrt{3}$)



（提示：取 $\alpha=\frac{\pi}{12}$，则 $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$，$\tan\alpha\leqslant\cot\beta\cdot\tan^2(\frac{\pi}{24}+\frac{\beta}{2})$）

(3)考虑锐角三角形 $ABC$ 中，由于 $0<A、B、C<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<A+B、B+C、A+C<\pi$，则 $\tan A\cdot\tan B\geqslant\tan^2\frac{A+B}{2}=\cot^2\frac{C}{2}$，$\tan B\tan C\geqslant\cot^2\frac{A}{2}$，$\tan C\tan A\geqslant\cot^2\frac{B}{2}$.

这样又得题

在锐角$\triangle ABC$中，求证：

①$\tan A\tan B\tan C\geqslant\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$；

②$\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A\geqslant\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{C}{2}\cot\frac{A}{2}$.

（提示：若 $x、y、z\in\mathbf{R}$，则 $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx$）

(4)在锐角$\triangle ABC$中，若 $\tan A、\tan B、\tan C$ 依次成等比数列，可得题：

在锐角$\triangle ABC$中，$\tan A、\tan B、\tan C$ 依次成等比数列，求证：$B\geqslant\frac{\pi}{3}$.

（提示：$\tan^2B=\tan A\tan C\geqslant\tan^2\frac{A+C}{2}=\cot^2\frac{B}{2}$，即 $\tan B\cdot\tan\frac{B}{2}\geqslant1$

$\Leftrightarrow\frac{2\tan\frac{B}{2}}{1-\tan^2\frac{B}{2}}\cdot\tan\frac{B}{2}\geqslant1\Leftrightarrow\tan^2\frac{B}{2}\geqslant\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{B}{2}\geqslant\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow B\geqslant\frac{\pi}{3}$）

(5)在锐角$\triangle ABC$中，若 $\tan A、\tan B、\tan C$ 依次成等差数列，又可得题：

在锐角$\triangle ABC$中，$\tan A、\tan B、\tan C$ 依次成等差数列，求证：$B\geqslant\frac{\pi}{3}$.

（提示：$2\tan B=\tan A+\tan C\geqslant2\sqrt{\tan A\tan C}\geqslant2\tan\frac{A+C}{2}=2\cot\frac{B}{2}$）

最后我们通过一个强大的不等式的演绎推理来结束本小节，希望读者能从中领悟更多关于演绎构造命题的常用方法与技巧.

**例3** 对于任意的正数 $x、y、z$ 及$\triangle ABC$的三内角 $A、B、C$，我们有：

(1)$x^2+y^2+z^2\geqslant2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C$.

**证明** $x^2+y^2+z^2-2yz\cos A-2zx\cos B-2xy\cos C$

$=x^2-2(z\cos B+y\cos C)x+y^2+z^2-2yz\cos A$

$=(x-z\cos B-y\cos C)^2+y^2+z^2-2yz\cos(\pi-B-C)-(z\cos B+y\cos C)^2$

$=(x-z\cos B-y\cos C)^2+y^2\sin^2C+z^2\sin^2B-2yz\sin B\sin C$

$=(x-z\cos B-y\cos C)^2+(y\sin C-z\sin B)^2\geqslant0$，





当且仅当 $\frac{\sin A}{x}=\frac{\sin B}{y}=\frac{\sin C}{z}$ 时取等号.

从证明过程中我们可以看到,运用的技巧仅配方法及 $\cos A=-\cos(B+C)$ 展开而已,由此可得

(2)对于任意正数 $x、y、z$ 及△ABC的三内角A、B、C,则

$x^2+y^2+z^2+2yz\cos 2A+2zx\cos 2B+2xy\cos 2C\geqslant 0.$

事实上 $x^2+y^2+z^2+2yz\cos 2A+2zx\cos 2B+2xy\cos 2C=(x+z\cos 2B+y\cos 2C)^2+(y\sin 2C-z\sin 2B)^2\geqslant 0.$

并且,当且仅当 $\frac{yz\sin^2 A}{y+z-x}=\frac{zx\sin^2 B}{z+x-y}=\frac{xy\sin^2 C}{x+y-z}$ 时取等号.

(3)在(1)中用 $\frac{1}{x}、\frac{1}{y}、\frac{1}{z}$ 代替 $x、y、z$,则有不等式

$x\cos A+y\cos B+z\cos C\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right);$

(4)在(2)中用 $\frac{1}{x}、\frac{1}{y}、\frac{1}{z}$ 代替 $x、y、z$,则有不等式

$x\cos 2A+y\cos 2B+z\cos 2C\geqslant-\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right);$

(5)将(4)应用二倍角公式,则有不等式

$x\sin^2 A+y\sin^2 B+z\sin^2 C\leqslant\frac{xyz}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2;$

(6)在(3)中令 $x=y=z=1$,则有不等式

$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2};$

(7)在(3)中令 $x=y=1,z=\frac{\sqrt{3}}{3}$,则有不等式

$\cos A+\cos B+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos C\leqslant\frac{5}{6}\sqrt{3};$

由于当 $A=B=\frac{\pi}{6},C=\frac{2}{3}\pi$ 时上式取等号,则可得下题.

(8)在△ABC中,求 $\cos A+\cos B+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos C$ 的最大值.

或求 $\sqrt{3}\cos A+\sqrt{3}\cos B+\cos C$ 的最大值;

由于△ABC中至多一个非锐角,故由(6)及均值不等式可得.

(9)在△ABC中,$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}$;



(10)在(1)中取 $x$、$y$、$z$ 即为$\triangle ABC$的三内角 $A$、$B$、$C$ 所对应的三边长 $a$、$b$、$c$，则有恒等式

$a^2+b^2+c^2=2bc\cos A+2ca\cos B+2ab\cos C$；

(也可写成正弦形式：$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2\sin B\sin C\cos A+2\sin C\sin A\cos B+2\sin A\sin B\cos C$)

(当然(10)中的恒等式也可看成由余弦定理相加而得)

(11)在(3)中用 $a$、$b$、$c$ 代替 $x$、$y$、$z$ 得：

$a\cos A+b\cos B+c\cos C\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)$；

又由于 $a\cos A+b\cos B+c\cos C$ 为$\triangle ABC$的垂足三角形的周长，这样得到

(12)$\triangle ABC$的垂足$\triangle DEF$的周长不超过$\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)$。

(13)将(11)中不等式化为正弦形式有：

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\leqslant\frac{\sin B\sin C}{\sin A}+\frac{\sin C\sin A}{\sin B}+\frac{\sin A\sin B}{\sin C}$；

(14)在(1)中令 $x=\tan\frac{A}{2}$、$y=\tan\frac{B}{2}$、$z=\tan\frac{C}{2}$，则

$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}$

$\geqslant 2\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\cos A+2\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\cos B+2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\cos C$，

上面不等式右边又可写成 $2\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)+2\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\left(1-2\sin^2\frac{B}{2}\right)$

$+2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\left(1-2\sin^2\frac{C}{2}\right)$

$=2\left(\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\right)$

$-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left[\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\right]$

$=2-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=2-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

这样在$\triangle ABC$中，我们可得不等式：

$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}+8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\geqslant 2$.

注 1　其间用到三角恒等式 $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$ 及





$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

可参照§2.2

**注2** 应用简单的估计，式 $\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geqslant 1$ 及 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$（参见§2.4）并不奏效

(15)在(3)中用 $\cos A,\cos B,\cos C$ 代替 $x,y,z$，可得

在锐角$\triangle ABC$中，$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\cos B\cos C}{\cos A}+\frac{\cos C\cos A}{\cos B}+\frac{\cos A\cos B}{\cos C}\right)$；

(16)对(5)中不等式的右边再次利用(3)，即令 $x=\frac{\cos C}{\cos B},y=\frac{\cos A}{\cos C},z=\frac{\cos B}{\cos A}$，则

$\frac{\cos B}{\cos A}\cos C+\frac{\cos C}{\cos B}\cos A+\frac{\cos A}{\cos C}\cos B\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2B}{\cos^2C}+\frac{\cos^2A}{\cos^2B}+\frac{\cos^2C}{\cos^2A}\right)$；

再结合(15)可得，

在锐角$\triangle ABC$中，求证：

$\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2\geqslant 4(\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C)$；

(17)如果再利用三角形内恒等式 $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\cos A\cos B\cos C$（参见§2.2），那么就有：

在锐角$\triangle ABC$中，求证：$\frac{\cos^2A}{\cos^2B}+\frac{\cos^2B}{\cos^2C}+\frac{\cos^2C}{\cos^2A}+8\cos A\cos B\cos C\geqslant 4$；

(18)用 $\tan A$、$\tan B$、$\tan C$ 代替(3)中 $x$、$y$、$z$，则

在锐角$\triangle ABC$中，求证：$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\tan B\tan C}{\tan A}+\frac{\tan C\tan A}{\tan B}+\frac{\tan A\tan B}{\tan C}\right)$；

(19)再利用 $\tan A\tan B\tan C\geqslant 3\sqrt{3}$，可得

在锐角$\triangle ABC$中，求证

$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{\sqrt{3}}{18}(\tan^2B\tan^2C+\tan^2C\tan^2A+\tan^2A\tan^2B)$；

(20)在(5)中令 $x=y=z=1$，则有

在$\triangle ABC$中，$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\leqslant\frac{9}{4}$；

(21)由均值不等式可知 $\sqrt{\frac{\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C}{3}}\geqslant\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}$，则有

在$\triangle ABC$中，$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$；



(22)由均值不等式可知 $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\geqslant\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}$，则有

在$\triangle ABC$中，$\sin A\sin B\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$；

(23)用 $x^2+k$、$y^2+k$、$z^2+k$ 来代替(5)中 $x$、$y$、$z$，则在$\triangle ABC$中，

$(x^2+k)\sin^2A+(y^2+k)\sin^2B+(z^2+k)\sin^2C$

$\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2+k}+\frac{1}{y^2+k}+\frac{1}{z^2+k}\right)(x^2+k)(y^2+k)(z^2+k)$，$(k>0)$

而$(x\sin A+y\sin B+z\sin C)^2$

$\leqslant[(x^2+k)\sin^2A+(y^2+k)\sin^2B+(z^2+k)\sin^2C]\left(\frac{x^2}{x^2+k}+\frac{y^2}{y^2+k}+\frac{z^2}{z^2+k}\right)$，$(k>0)$

令 $\frac{x^2}{x^2+k}+\frac{y^2}{y^2+k}+\frac{z^2}{z^2+k}=1$，则$\frac{1}{x^2+k}+\frac{1}{y^2+k}+\frac{1}{z^2+k}=\frac{2}{k}$，

这样$(x\sin A+y\sin B+z\sin C)^2\leqslant(x^2+k)\sin^2A+(y^2+k)\sin^2B+(z^2+k)\sin^2C$

$\leqslant\frac{1}{k^2}\cdot(x^2+k)(y^2+k)(z^2+k)$；

并且，当且仅当$\frac{x^2+k}{x}\sin A=\frac{y^2+k}{y}\sin B=\frac{z^2+k}{z}\sin C$时取等号

当然，我们就得到一个很有意义的问题.

设正数 $x$、$y$、$z$、$k$ 满足$\frac{x^2}{x^2+k}+\frac{y^2}{y^2+k}+\frac{z^2}{z^2+k}=1$，$A$、$B$、$C$ 为$\triangle ABC$的三内角，则

$x\sin A+y\sin B+z\sin C\leqslant\frac{1}{k}\sqrt{(x^2+k)(y^2+k)(z^2+k)}$，

并且，当且仅当$\frac{x^2+k}{x}\sin A=\frac{y^2+k}{y}\sin B=\frac{z^2+k}{z}\sin C$时取等号.

(24)在(23)中取 $x=1$，$y=\frac{2}{3}$，$z=\sqrt{\frac{32}{17}}$，$k=2$，则在$\triangle ABC$中，

$\sin A+\frac{2}{3}\sin B+\sqrt{\frac{32}{17}}\sin C\leqslant\frac{11}{\sqrt{17}}$；

(25)由于(24)中不等式在 $\sin A:\sin B:\sin C=11:9:2\sqrt{34}$时取等号，这样可以将其改写成命题

在$\triangle ABC$中，求 $\sin A+\frac{2}{3}\sin B+\sqrt{\frac{32}{17}}\sin C$ 的最大值；

(26)用$\frac{1}{y+z}$、$\frac{1}{z+x}$、$\frac{1}{x+y}$代替(5)中 $x$、$y$、$z$，则在$\triangle ABC$中，$x$、$y$、$z\in\mathbf{R}^+$，有

$\frac{\sin^2A}{y+z}+\frac{\sin^2B}{z+x}+\frac{\sin^2C}{x+y}\leqslant\frac{(x+y+z)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}$；





(27)对(26)利用加数幂平均不等式

$$\frac{x\cdot\frac{\sin^2A}{x(y+z)}+y\cdot\frac{\sin^2B}{y(z+x)}+z\cdot\frac{\sin^2C}{z(x+y)}}{x+y+z}$$

$$\geqslant\left[\left(\frac{\sin^2A}{x(y+z)}\right)^x\cdot\left(\frac{\sin^2B}{y(z+x)}\right)^y\cdot\left(\frac{\sin^2C}{z(x+y)}\right)^z\right]^{\frac{1}{x+y+z}},$$

即 $\frac{\sin^2A}{y+z}+\frac{\sin^2B}{z+x}+\frac{\sin^2C}{x+y}\geqslant(x+y+z)\cdot\left[\frac{(\sin^xA\sin^yB\sin^zC)^2}{x^xy^yz^z(y+z)^x(z+x)^y(x+y)^z}\right]^{\frac{1}{x+y+z}}$,

这样我们就得题.设 $x、y、z\in\mathbf{R}^+$,则在△ABC 中有

$$\sin^xA\sin^yB\sin^zC\leqslant\sqrt{\frac{x^xy^yz^z(x+y+z)^{x+y+z}}{(x+y)^{x+y}(y+z)^{y+z}(z+x)^{z+x}}},$$

并且,当且仅当 $\frac{\sin A}{\sqrt{x(y+z)}}=\frac{\sin B}{\sqrt{y(z+x)}}=\frac{\sin C}{\sqrt{z(x+y)}}$ 时取等号.

(28)在(27)中我们令 $x=1、y=2、z=3$,则对于任意△ABC 均有

$\sin A\sin^2B\sin^3C\leqslant\frac{27\cdot\sqrt{5}}{125}$,当且仅当 $\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{5}:2\sqrt{2}:3$ 时取等号.

当然我们在这里只举了很小一部分例子,还可以从各个角度逐个深入研究.

# §1.2 单位圆

任意角的三角函数值都可以用单位圆上的点的坐标或单位圆中的有向线段(即三角函数线)来表示.这为我们借助坐标的代数方法、借助三角函数线的几何方法构造三角函数问题提供了方便.下面我们举一些利用三角函数线及利用坐标运算来构造问题的例子.

**例1** 如图1-1,在单位圆中考察锐角 $\alpha$ 的正弦线 $NM$,余弦线 $ON$,正切线 $AT$,余切线 $BS$(其中 $AT$,$BS$ 为⊙$O$ 的切线),正割线 $OP$.

(1)在 Rt△$OMN$ 中,由于 $|ON|^2+|NM|^2=|OM|^2$,则可知 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$(可以推广至 $\alpha\in\mathbf{R}$);

(2)在 Rt△$OMN$ 中,由于 $|ON|+|NM|>|OM|=1$,则可知 $\cos\alpha+\sin\alpha>1$($\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$),



进一步，$|ON| < |\widehat{BM}|$，$|NM| < |\widehat{AM}|$，故 $|ON| + |NM| < |\widehat{AM}| + |\widehat{MB}| = \frac{\pi}{2}$，这样 $1 < \cos\alpha + \sin\alpha < \frac{\pi}{2}$，$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

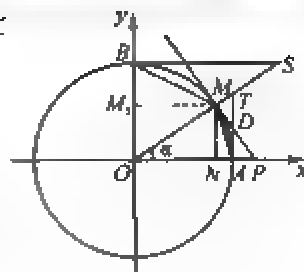


图1.1

(3) Rt$\triangle OMN$ 的内切圆半径 $r = \frac{|ON| \cdot |MN|}{|ON| + |NM| + |MO|} = \frac{|ON| + |NM| - |MO|}{2}$，即 $\frac{\cos\alpha \cdot \sin\alpha}{1 + \cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha - 1}{2}$，

当然上式对于任意的 $\alpha \in \mathbf{R}$ 均成立，对上式利用合分比定理可得

$$\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha - 1} = \frac{\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha + \sin\alpha + 1}{\cos\alpha + \sin\alpha + 3} \ (\alpha \in \mathbf{R}).$$

(4) 在 $\triangle MNA$ 中，$|MN| + |NA| > |AM| = 2\sin\frac{\alpha}{2}$，故

$\sin\alpha + 1 - \cos\alpha > 2\sin\frac{\alpha}{2}$，$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

又因为 $|\widehat{AM}| > |AM|$，那么 $|\widehat{AM}|$ 与 $|MN| + |NA|$ 谁大呢？

我们作矩形 $ANMN'$，则 $|\widehat{AM}| < |MN'| + |N'A| = |MN| + |NA|$.

或令 $f(\alpha) = \sin\alpha + 1 - \cos\alpha - \alpha$，$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$，

则 $f'(\alpha) = \cos\alpha + \sin\alpha - 1 > 0$，且 $f(0) = 0$，

故 $f(\alpha) > 0$，$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$，即

$1 + \sin\alpha > \alpha + \cos\alpha$，$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

这样可以得到不等式链：$1 + \sin\alpha > \alpha + \cos\alpha > 2\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha$，$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

**注** 不要放弃一些未定的因素，经过你的努力探索，你就可能会挖掘到宝藏！

(5) 由于 $S_{\triangle OAM} < S_{扇形AOM} < S_{\triangle OAT}$，则

$\frac{1}{2}|OA| \cdot |NM| < \frac{1}{2}|OA| \cdot |OM| \cdot \alpha < \frac{1}{2}|OA| \cdot |AT|$，

故 $\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$，$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$

当然也可用 $S_{\triangle OAM} < S_{扇形AOM} < S_{\triangle OMP}$，则

$\frac{1}{2}|OA| \cdot |AM| < \frac{1}{2}|OA| \cdot |OM| \cdot \alpha < \frac{1}{2}|OP| \cdot |NM|$，

故 $\sin\alpha < \alpha < \sec\alpha \cdot \sin\alpha$，即 $\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$，$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

从中我们可以看到利用△$OAT$ 与△$OMP$ 的面积来估计扇形 $AOM$ 的面积是等价的.

(6)设 $AT$ 与 $MP$ 交于 $D$,则 $S_{扇形OAM}<S_{四边形OADM}<S_{\triangle OAT}$

又设$\angle AOD=\theta,\theta\in(0,\alpha)$,则

$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\alpha<\frac{1}{2}\cdot1\cdot\tan\theta+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\tan(\alpha-\theta)<\frac{1}{2}\cdot1\cdot\tan\alpha,$$

即 $\alpha<\tan\theta+\tan(\alpha-\theta)<\tan\alpha\quad(0<\theta<\alpha<\frac{\pi}{2})$

在单位圆中,我们考查两个角的三角函数线,则我们可以看到许多常用的结论是非常直观的.

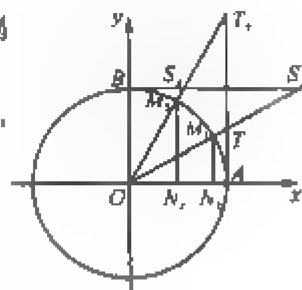



图 1-2

**例 2** 如图1-2,单位圆中 $M_1(\cos x_1,\sin x_1)$,$M_2(\cos x_2,\sin x_2)$,$0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$

(1)由于 $ON_1>ON_2$,故 $y=\cos x$ 在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减.

(2)由于 $N_1M_1<N_2M_2$,故 $y=\sin x$ 在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递增.

(3)由于 $AT_1<AT_2$,故 $y=\tan x$ 在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递增.

(4)由于 $BS_1>BS_2$,故 $y=\cot x$ 在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减.

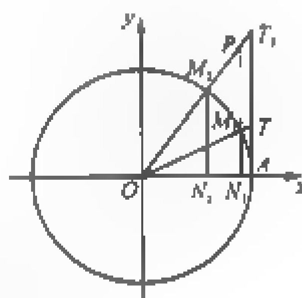



图 1-3

(5)如图 1-3,延长 $N_1M_1$ 交 $OT_2$ 于 $P$,则

$S_{扇形OM_1M_2}<S_{\triangle OM_1P}$,故 $\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot|\widehat{M_1M_2}|<\frac{1}{2}|M_1P|\cdot|ON_1|<\frac{1}{2}|M_1P|$,得$|\widehat{M_1M_2}|<|M_1P|$,而$|M_1N_1|<|\widehat{AM_1}|$,这样

$$\frac{\tan x_2}{\tan x_1}=\frac{|AT_2|}{|AT_1|}=\frac{|N_1P|}{|N_1M_1|}=1+\frac{|M_1P|}{|N_1M_1|}>1+\frac{|\widehat{M_1M_2}|}{|\widehat{AM_1}|}=\frac{|\widehat{AM_2}|}{|\widehat{AM_1}|}=\frac{x_2}{x_1},即$$

$$\frac{\tan x_2}{x_2}>\frac{\tan x_1}{x_1}$$

故函数 $y=\frac{\tan x}{x}$在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递增.

(6)由(5)即可知函数 $y=x\cdot\cot x$,在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减.

(7)由于$\frac{\tan x}{x}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$,而 $y=\cos x$ 在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减,且$\frac{\sin x}{x}>0$,$\cos x>0$,



这样，函数 $y=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上增减性如何呢？

$y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0$ （利用当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时有 $\sin x<x<\tan x$），

即函数 $y=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减.

**注** 在§2.3的例7中有关于函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}, x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 更详尽的论述.

**例3** 在例1的(2)中我们构造三角函数问题 $1<\sin\alpha+\cos\alpha<\frac{\pi}{2}, \alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，但我们通过代数运算可得更强结论 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\leqslant\sqrt{2}$（当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时取"="）. 下面利用单位圆再次构造此问题，希望对读者有所帮助. 如图1-4，单位圆中 $ON$、$NM$ 分别为 $\alpha$ 的余弦线与正弦线.

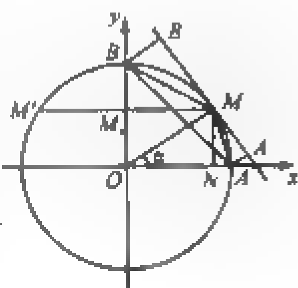



图1-4

$A_1B_1$ 是过 $M$ 点的切线，$A$、$B$ 在 $A_1B_1$ 上的射影分别为 $A_1$、$B_1$，过 $M$ 作 $y$ 轴的垂线交 $y$ 轴于 $M_1$，交⊙$O$ 于另一点 $M'$，则 $\angle BMM'=\angle BM'M=\angle B_1MB$. 这样 $Rt\triangle BM_1M\cong Rt\triangle BB_1M$. 所以 $B_1M=M_1M$. 同理 $MN=MA_1$，即 $A_1B_1=MM_1+MN=\cos\alpha+\sin\alpha$.

在四边形 $AA_1B_1B$ 中，$A_1B_1\leqslant AB=\sqrt{2}$，当且仅当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时取"="，所以

$$\cos\alpha+\sin\alpha\leqslant\sqrt{2}, \alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$$

**注** "形无数不入微"非常精辟地点出了形的弱点，在描述问题时也是如此. 在例1中我们仅仅得到 $\sin\alpha+\cos\alpha<\frac{\pi}{2}$ 一个粗略的估计，通过代数运算可知 $\sin\alpha+\cos\alpha\leqslant\sqrt{2}$，这促使我们再次构造图形，如果成功，则有收获，从中再次构造出新颖问题.

**例4** 如图1-5，在单位圆中，$\angle xOB=\alpha$，$\angle xOA=\frac{\alpha}{2}$，$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$NA$ 为⊙$O$ 的切线，则 $NA\parallel Ox$，所以 $\angle BAO=\angle AOx=\angle BOA=\frac{\alpha}{2}$，

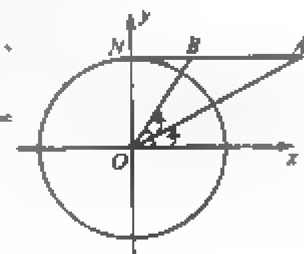



图1-5

故 $|OB|=|BA|$.

而 $|ON|<|OB|$，所以 $|ON|+|NB|<|OB|+|NB|=|BA|+|NB|=|NA|$.

(1)即 $1+\cot\alpha<\cot\frac{\alpha}{2}$，$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$

(2)由上式将 $\alpha$ 放入△$ABC$ 中，则有：在锐角△$ABC$ 中，求证：

$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}-\cot A-\cot B-\cot C>3$.

(3)看到(1)中的递推关系 $\cot\frac{\alpha}{2}-\cot\alpha>1$，则 $\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cot\frac{\alpha}{2^{k+1}}-\cot\frac{\alpha}{2^k}\right)>n$，

即 $\cot\frac{\alpha}{2^n}-\cot\alpha>n$，再将 $\cot\alpha$ 隐藏起来，得到问题：

对于 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，求证：$\cot\frac{\alpha}{2^n}>n$.

**例 5** 如图 1-6，在单位圆中，$A(\cos x,\sin x)$，$B(\cos y,\sin y)$，$C(\cos z,\sin z)$，其中 $0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$，考查扇形 $XOY$ 面积的不足近似，$\frac{\pi}{4}=S_{扇形XOY}>S_{矩形AA_1B_1A_2}+S_{矩形BB_1C_1B_2}+S_{矩形CC_1}=(\cos x-\cos y)\sin x+(\cos y-\cos z)\sin y+(\cos z-0)\sin z=\cos x\sin x+\cos y\sin y+\cos z\sin z-\cos y\sin x-\cos z\sin y$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 2y+\frac{1}{2}\sin 2z-\cos y\sin x-\cos z\sin y$，

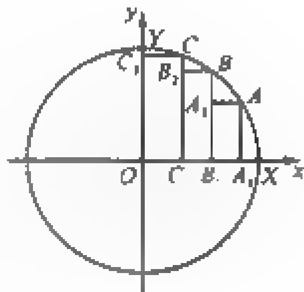


图 1-6

即 $\frac{\pi}{2}+2\cos y\sin x+2\cos z\sin y>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z$

**注** 下面通过不同角度来考查与之类似的不等式

(1)排序不等式的角度.

由于 $0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$，故

$0<\sin x<\sin y<\sin z<1$，$0<\cos z<\cos y<\cos x<1$，

则 $\cos x\sin x+\cos y\sin y+\cos z\sin z<\sin x\cos y+\sin y\cos z+\sin z\cos x$，

故 $\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z<2\sin x\cos y+2\sin y\cos z+2\sin z\cos x<2\sin x\cos y+2\sin y\cos z+2$.

(2)从积分的角度考虑，分割越细，精度会越高，现在仅有 3 个分点，此种估计精度应该不是太高.下面通过增加分点来估计不等式.设 $0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n<\frac{\pi}{2}$，求证：

$\sin 2\theta_1+\sin 2\theta_2+\cdots+\sin 2\theta_n<\frac{\pi}{2}+2\sin\theta_1\cos\theta_2+2\sin\theta_2\cos\theta_3+2\sin\theta_3\cos\theta_4+\cdots+2\sin\theta_{n-1}\cos\theta_n$



(3) 在(2)中是通过增加分点来提高不等式的精度，从积分的角度来考察，此时 $\frac{\pi}{2}$ 是最佳的，但对于仅有3个分点的不等式而言，$\frac{\pi}{2}$ 肯定还有改进的余地，从代数变形的角度试试看

$$
\begin{aligned}
&\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z-2\sin x\cos y-2\sin y\cos z\\
=&\frac{1}{2}(\sin 2x+\sin 2y)+\frac{1}{2}(\sin 2y+\sin 2z)+\frac{1}{2}(\sin 2z+\sin 2x)-2\sin x\cos y-\\
&2\sin y\cos z\\
=&\sin(x+y)\cos(x-y)+\sin(y+z)\cos(y-z)+\sin(z+x)\cos(z-x)-2\sin x\cos y-\\
&2\sin y\cos z\\
\leqslant&\sin(x+y)\cos(x-y)+\sin(y+z)\cos(y-z)+\sin(z+x)\cos(z-x)-\\
&2\sin x\cos y\cos(x-y)-2\sin y\cos z\cos(y-z)\\
=&\cos(x-y)[\sin(x+y)-2\sin x\cos y]+\cos(y-z)[\sin(y+z)-2\sin y\cos z]+\sin(z\\
&+x)\cos(z-x)\\
=&\cos(x-y)\sin(y-x)+\cos(y-z)\sin(z-y)+\sin(z+x)\cos(z-x)\\
=&\frac{1}{2}[\sin 2(y-x)+\sin 2(z-y)]+\sin(z+x)\cos(z-x)\\
=&\sin(z-x)\cos(2y-x-z)+\sin(z+x)\cos(z-x)\\
\leqslant&\sqrt{\cos^2(2y-x-z)+\sin^2(z+x)}\leqslant\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

又由于 $0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$，且当 $\begin{cases}y=x\\y=z\\2y-x-z=0\\z+x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ 时取"="，因此"="取不到。

这样我们得到若 $0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$，则 $\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z<\sqrt{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z$。

由于 $\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$，我们通过代数变形得到了一个更强的不等式，像上面通过简单的面积估计是做不到的

(4) 对于任意 $0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$，不等式 $\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z\leqslant a+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z$ 恒成立的最小正数 $a$ 为何值，笔者还未有结果，希望广大读者能积极探索

(5) 依据例题的方法，我们也可以构造一个类似的不等式。





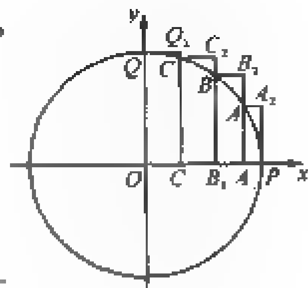


图 1-7

如图 1-7，单位圆中 $A(\cos x,\sin x)$，$B(\cos y,\sin y)$，$C(\cos z,\sin z)$ $(0<x<y<z<\frac{\pi}{2})$，

$$\frac{\pi}{4}=S_{扇形POQ}<S_{矩形AA_1PA_2}+S_{矩形BB_1A_1B_2}+S_{矩形CC_1B_1C_2}+S_{矩形QOC_1Q_2}，$$

所以 $\frac{\pi}{4}<(1-\cos x)\sin x+(\cos x-\cos y)\sin y+(\cos y-\cos z)\sin z+\cos z$，

即 $\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z+\frac{\pi}{2}<2\sin x+2\cos z+2\cos x\sin y+2\cos y\sin z$ 对于任意 $0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$ 均成立.

将单位圆放入解析几何的背景下来研究也可以构造许多三角函数问题.

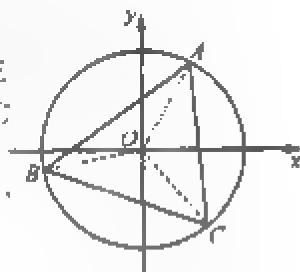


图 1-8

**例 6** 如图 1-8，圆方程：$x^2+y^2=1$.

(1) 利用平面几何的常用结论，重心与外心重合的三角形是正三角形，使点 $A$、$B$、$C$ 的坐标为 $A(\cos x,\sin x)$、$B(\cos y,\sin y)$、$C(\cos z,\sin z)$ $(0<x<y<z<2\pi)$.

令 $\cos x+\cos y+\cos z=0$，$\sin x+\sin y+\sin z=0$，这样 $\triangle ABC$ 为正三角形.

又由于 $0<x<y<z<2\pi$，则 $y=x+\frac{2}{3}\pi$，$z=y+\frac{2}{3}\pi$.

即 $2y=x+z$，$\cos(y-x)=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$，$\cos(y-z)=-\frac{1}{2}$，$\cos(z-x)=-\frac{1}{2}$.

这样可以构造如下命题：

已知 $x$、$y$、$z\in\mathbf{R}$，$\cos x+\cos y+\cos z=0$，$\sin x+\sin y+\sin z=0$，

①求 $\cos(x-y)+\cos(y-z)+\cos(z-x)$ 的值；

②求 $\cos(x-y)\cdot\cos(y-z)\cdot\cos(z-x)$ 的值；

③若 $0<x<y<z<2\pi$，求证 $x$，$y$，$z$ 依次成等差数列.

再从直线与圆的位置关系角度作讨论

(2) 如图 1-9，$A$ 为定点(3，2)，$AP_1$、$AP_2$ 为单位圆的切线，$P$ 为单位圆上一动点，直线 $AP$ 是限定在直线 $AP_1$、$AP_2$ 之间，由于直线 $AP_1$、$AP_2$ 的斜率分别为 $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ 与 $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$，则可得直线 $AP$ 的斜率取值范围是 $\left[\frac{3-\sqrt{3}}{4},\frac{3+\sqrt{3}}{4}\right]$



可构造问题：已知 $\theta\in\mathbf{R}$，求函数 $y=\dfrac{\sin\theta+2}{\cos\theta+3}$的值域.

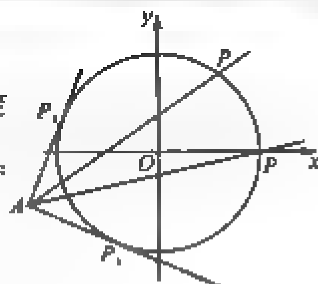



图 1-9

(3)在(2)中若让 $P$ 在上半个圆上运动，则直线 $AP$ 是限定在直线 $AP_3$ 与 $AP_2$ 之间，而直线 $AP_3$ 的斜率为 $\dfrac{1}{2}$，可构造问题：

已知 $\theta\in[0,\pi]$，求函数 $f(\theta)=\dfrac{\sin\theta+2}{\cos\theta+3}$的值域.

$\left(答案：[\dfrac{1}{2},\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}]\right)$

(4)当然也可以乘以一个伸缩系数，使之看上去是椭圆，譬如

已知 $\theta\in[0,\pi]$，求函数 $f(\theta)=\dfrac{3\sin\theta+6}{2\cos\theta+6}$的值域

$\left(答案：[\dfrac{3}{4},\dfrac{9+3\sqrt{3}}{8}]\right)$

事实上，此时 $f(\theta)=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\sin\theta+2}{\cos\theta+3}$.

(5)如图 1-10，设 $A(\cos\theta,\sin\theta)$，$B(\cos\varphi,\sin\varphi)$，其中 $\varphi-\theta\neq 2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

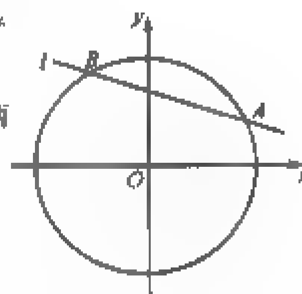



图 1-10

这样 $A$、$B$ 为直线 $l$ 与单位圆两个不同的交点，下面我们从两个不同的角度来考查直线 $l$.

一方面由直线 $l$：$\dfrac{y-\sin\theta}{x-\cos\theta}=\dfrac{\sin\varphi-\sin\theta}{\cos\varphi-\cos\theta}$,

即 $x\cos\dfrac{\theta+\varphi}{2}+y\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}=\cos\dfrac{\theta-\varphi}{2}$.

另一方面，设直线 $l$ 为 $ax+by=c$，因为点 $A$、$B$ 均在直线 $l$ 上，即满足 $\begin{cases}a\cos\theta+b\sin\theta=c\\a\cos\varphi+b\sin\varphi=c\end{cases}$

这样方程 $x\cdot\cos\dfrac{\theta+\varphi}{2}+y\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}=\cos\dfrac{\theta-\varphi}{2}$与方程 $ax+by=c$ 表示同一条直线.

故 $\dfrac{a}{\cos\dfrac{\theta+\varphi}{2}}=\dfrac{b}{\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}}=\dfrac{c}{\cos\dfrac{\theta-\varphi}{2}}$.

进一步，考察原点与直线 $l$ 的距离，即

$\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\left|\cos\dfrac{\theta-\varphi}{2}\right|\Leftrightarrow\dfrac{c^2}{a^2+b^2}=\cos^2\dfrac{\theta-\varphi}{2}$.

这样可得问题：

已知 $a\cos\theta+b\sin\theta=c$，$a\cos\varphi+b\sin\varphi=c$，其中 $\theta-\varphi\neq 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，求证：

① $\dfrac{a}{\cos\dfrac{\theta+\varphi}{2}}=\dfrac{b}{\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}}=\dfrac{c}{\cos\dfrac{\theta-\varphi}{2}}$；

② $\cos^2\dfrac{\theta-\varphi}{2}=\dfrac{c^2}{a^2+b^2}$.

(6) 考察仅含有 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 一次式的函数

$y=\dfrac{x^2+2x\sin\theta+2}{x^2+2x\cos\theta+2}$，将之整理得，

$2x\sin\theta-2yx\cos\theta+(x^2+2)(1-y)=0$，则可以看成点$(\cos\theta,\sin\theta)$是直线 $2x\cdot a-2yx\cdot b+(x^2+2)(1-y)=0$ 与圆 $a^2+b^2=1$ 的公共点，故有：

$\dfrac{|(x^2+2)(1-y)|}{\sqrt{4x^2+(2xy)^2}}\leqslant 1$，

这样 $\dfrac{|1-y|}{\sqrt{1+y^2}}\leqslant\dfrac{2|x|}{2+x^2}\leqslant\dfrac{2|x|}{2\sqrt{2x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

所以 $2-\sqrt{3}\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{3}$.

进而补充一个细节问题，当 $x=0$ 时，$y=1$ 也在所求范围中.

这样可得问题：

求二元函数 $f(x,\theta)=\dfrac{x^2+2x\sin\theta+2}{x^2+2x\cos\theta+2}$，$x,\theta\in\mathbf{R}$ 的值域.

如果我们在单位圆中考察某些特殊的单位向量，对于问题的构造又是一片新天地.

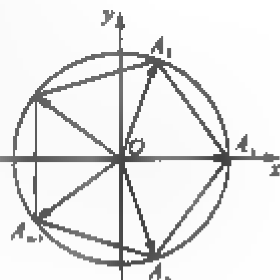


图 1-11

**例 7** 如图 1-11，圆的内接正 $n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_n$，由于 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$，且 $\angle A_1OA_2=\angle A_2OA_3=\cdots=\angle A_{n-1}OA_n=\angle A_nOA_1=\dfrac{2\pi}{n}$.

则 $A_1(\cos 0,\sin 0)$，$A_2\left(\cos\dfrac{2\pi}{n},\sin\dfrac{2\pi}{n}\right)$，$A_3\left(\cos\dfrac{4\pi}{n},\sin\dfrac{4\pi}{n}\right)$，…，$A_n\left(\cos\dfrac{2(n-1)\pi}{n},\sin\dfrac{2(n-1)\pi}{n}\right)$

这样可得

(1) $\cos\dfrac{2\pi}{n}+\cos\dfrac{4\pi}{n}+\cos\dfrac{6\pi}{n}+\cdots+\cos\dfrac{2(n-1)\pi}{n}=-1$；

(2) $\sin\dfrac{2\pi}{n}+\sin\dfrac{4\pi}{n}+\sin\dfrac{6\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{2(n-1)\pi}{n}=0$.

由诱导公式可知，



$\sin\frac{2\pi}{n}=-\sin\frac{2(n-1)}{n}\pi,\sin\frac{4\pi}{n}=-\sin\frac{2(n-2)}{n}\pi,\cdots,$

故(2)式是平凡的，在图形中考察向量对 $x$、$y$ 轴作正交分解也可知.

若 $n$ 为 $4k-1(k\in\mathbf{N}^*)$型数，由(1)可知：

$\cos\frac{2\pi}{4n-1}+\cos\frac{4\pi}{4n-1}+\cos\frac{6\pi}{4n-1}+\cdots+\cos\frac{4n-2}{4n-1}\pi+\cos\frac{4n}{4n-1}\pi+\cos\frac{4n+2}{4n-1}\pi+\cdots$
$+\cos\frac{2(4n-2)\pi}{4n-1}=-1.$

由于 $\cos\frac{4n\pi}{4n-1}+\cos\frac{4n+2}{4n-1}\pi+\cos\frac{4n+4}{4n-1}\pi+\cdots+\cos\frac{2(4n-2)\pi}{4n-1}$

$=\cos\frac{2\pi}{4n-1}+\cos\frac{4\pi}{4n-1}+\cdots+\cos\frac{4n-2}{4n-1}\pi$

这样又得

(3) $\cos\frac{2\pi}{4n-1}+\cos\frac{4\pi}{4n-1}+\cos\frac{6\pi}{4n-1}+\cdots+\cos\frac{4n-2}{4n-1}\pi=-\frac{1}{2}.$

特别地取 $n=2$、3 得

(4) $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}.$

(5) $\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{6\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{10}{11}\pi=-\frac{1}{2}.$

若将正 $n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 绕原点 $O$ 逆时针旋转 $\theta$ 弧度，则仍旧有 $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=\vec{0}$，但点 $A_i$ 的坐标变为 $A_i\left(\cos(\theta+\frac{2(i-1)}{n}\pi),\sin(\theta+\frac{2(i-1)}{n}\pi)\right),i=1,2,\cdots,n.$

这样可得

(6) $\sum_{i=1}^{n}\cos\left[\theta+\frac{2(i-1)}{n}\pi\right]=0$

考虑特殊情形，比取 $\theta=1$、$n=5$，则有

(7) $\cos1+\cos(1+\frac{2}{5}\pi)+\cos(1+\frac{4}{5}\pi)+\cos(1+\frac{6}{5}\pi)+\cos(1+\frac{8}{5}\pi)=0.$





# §1.3 复数与方程

复数的三角形式沟通了代数与三角函数间的联系，也为利用复数来构造三角函数问题创造了良好的条件．下面我们将从恒等变形与单位根这两个角度，利用复数知识来构造三角函数问题

## §1.3.1 复数的恒等变形

复数与生俱来就是一个多面手，具有多种直观形式，代数式、几何式、三角式、指数式等等，而每种形式均服从于各自的运算律，这就为我们利用各运算律之间的差异构造三角函数问题提供了一个契机．

**例 1** 令 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta,\theta\in\mathbf{R}$，考查 $z^n$ 的表达式．

一方面，由棣莫佛定理可知，$z^n=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$．

另一方面，由二项式定理可知，

$$
\begin{aligned}
z^n&=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n\\
&=C_n^0\cos^n\theta+C_n^1\cos^{n-1}\theta(\mathrm{i}\sin\theta)+C_n^2\cdot\cos^{n-2}\theta\cdot(\mathrm{i}\sin\theta)^2+\cdots+C_n^k\cdot\cos^{n-k}\theta\cdot(\mathrm{i}\sin\theta)^k+\\
&\quad\cdots+C_n^n(\mathrm{i}\sin\theta)^n\\
&=[C_n^0\cos^n\theta-C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots+(-1)^k\cdot C_n^{2k}\cos^{n-2k}\theta\sin^{2k}\theta+\cdots]\\
&\quad+\mathrm{i}\cdot[C_n^1\cos^{n-1}\theta\cdot\sin\theta-C_n^3\cos^{n-3}\theta\cdot\sin^3\theta+\cdots+(-1)^{k-1}C_n^{2k-1}\cos^{n-2k+1}\theta\sin^{2k-1}\theta+\\
&\quad\cdots].
\end{aligned}
$$

(1)比较实部与虚部，这样我们就得到恒等式：

$$\cos n\theta=C_n^0\cos^n\theta-C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+C_n^4\cos^{n-4}\theta\cdot\sin^4\theta-\cdots+(-1)^kC_n^{2k}\cos^{n-2k}\theta\cdot\sin^{2k}\theta+\cdots,$$

$$\sin n\theta=C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta-C_n^3\cos^{n-3}\theta\cdot\sin^3\theta+\cdots+(-1)^{k-1}C_n^{2k-1}\cdot\cos^{n-2k+1}\theta\cdot\sin^{2k-1}\theta+\cdots.$$

(2)特别地，当 $n=2$ 时，

$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta,\sin2\theta=2\cos\theta\sin\theta$；

当 $n=3$ 时，

$\cos3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta(1-\cos^2\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta$．



$\sin3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta=3(1-\sin^2\theta)\sin\theta-\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta.$

(3)如果我们令 $\theta=\frac{\pi}{4}$,则

$\cos\frac{n\pi}{4}=C_n^0\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})^n-C_n^2\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})^n+C_n^4\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})^n-\cdots+(-1)^kC_n^{2k}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})^n+\cdots,$

$\sin\frac{n\pi}{4}=C_n^1(\frac{\sqrt{2}}{2})^n-C_n^3(\frac{\sqrt{2}}{2})^n+C_n^5(\frac{\sqrt{2}}{2})^n-\cdots+(-1)^{k+1}C_n^{2k-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})^n+\cdots,$

即 $C_n^0-C_n^2+C_n^4-\cdots+(-1)^k\cdot C_n^{2k}+\cdots=(\sqrt{2})^n\cdot\cos\frac{n\pi}{4},$

$C_n^1-C_n^3+C_n^5-\cdots+(-1)^{k+1}C_n^{2k-1}+\cdots=(\sqrt{2})^n\cdot\sin\frac{n\pi}{4}.$

(4)如果令 $\theta=\frac{\pi}{6}$,则

$C_n^0 3^{\frac{n}{2}}-C_n^2\cdot3^{\frac{n-2}{2}}+C_n^4\cdot3^{\frac{n-4}{2}}-\cdots+(-1)^kC_n^{2k}3^{\frac{n-2k}{2}}+\cdots=2^n\cdot\cos\frac{n\pi}{6};$

$C_n^1\cdot3^{\frac{n-1}{2}}-C_n^3\cdot3^{\frac{n-3}{2}}+\cdots+(-1)^k\cdot C_n^{2k+1}\cdot3^{\frac{n-2k-1}{2}}+\cdots=2^n\cdot\sin\frac{n\pi}{6}.$

(5)再者,我们从模 $|z^n|$ 的角度考虑又有如下恒等式.

$[C_n^0\cos^n\theta-C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots+(-1)^kC_n^{2k}\cos^{n-2k}\theta\cdot\sin^{2k}\theta+\cdots]^2+[C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta-C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+C_n^5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\cdots+(-1)^kC_n^{2k-1}\cos^{n-2k+1}\theta\sin^{2k-1}\theta+\cdots]^2=1.$

(6)若令 $n=5$ 得:

$(\cos^5\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta+5\cos\theta\sin^4\theta)^2+(\sin^5\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+5\cos^4\theta\sin\theta)^2=1.$

(7)如果令 $\cos\theta=\frac{1}{3}$,将上式改为求值题,即已知 $\cos\theta=\frac{1}{3}$,求 $(\cos^5\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta+5\cos\theta\sin^4\theta)^2+(\sin^5\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+5\cos^4\theta\sin\theta)^2$ 的值,颇具有迷惑性.

(8)当然结合(3)讨论,我们又可得:

$[C_n^0-C_n^2+C_n^4-\cdots+(-1)^kC_n^{2k}+\cdots]^2+[C_n^1-C_n^3+C_n^5-\cdots+(-1)^{k+1}C_n^{2k-1}+\cdots]^2=2^n$. 这是一个很漂亮的组合恒等式,看上去有点令人惊奇,但它却只是棣莫佛定理与二项式定理相结合的一个推论而已.

**例 2** 令 $z=\cos\theta+i\sin\theta,\theta\in\mathbf{R}$,则 $\bar{z}=\cos\theta-i\sin\theta$.

(1)由于 $|z|=1$ 及 $|z|^2=z\cdot\bar{z}$,这样即可得三角函数中最常用的恒等式 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.

(2)考查等式 $z+z^2+z^3+\cdots+z^n=\frac{z(1-z^n)}{1-z},n\in\mathbf{N}^*$.

一方面:$z+z^2+z^3+\cdots+z^n=(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos2\theta+i\sin2\theta)+(\cos3\theta+i\sin3\theta)+\cdots+(\cos n\theta+i\sin n\theta)$





$=(\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta+\cdots+\cos n\theta)+i(\sin\theta+\sin2\theta+\sin3\theta+\cdots+\sin n\theta)$；

另一方面

$$\frac{z(1-z^n)}{1-z}=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)(1-\cos n\theta-i\sin n\theta)}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$$

$$=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)\left[\cos\left(\frac{n\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{n\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot 2\sin\frac{n\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right]}$$

$$=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\left(\cos\frac{n+1}{2}\theta+i\sin\frac{n+1}{2}\theta\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}+i\,\frac{\sin\frac{n}{2}\theta\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

比较上述两式的实部与虚部即可得：

$$\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}},n\in\mathbf{N}^*;$$

$$\sin\theta+\sin2\theta+\sin3\theta+\cdots+\sin n\theta=\frac{\sin\frac{n}{2}\theta\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}},n\in\mathbf{N}^*.$$

上述两个式子的应用我们已经在第 节中做过论述，这里不再重复。

**例3** 考查恒等式 $z_1^3+z_2^3+z_3^3-3z_1z_2z_3=(z_1+z_2+z_3)(z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_1z_2-z_2z_3-z_3z_1)$

(1)若令 $z_1+z_2+z_3=0$，则有 $z_1^3+z_2^3+z_3^3=3z_1z_2z_3$，据此我们可以构造如下命题。

已知 $\cos A+\cos B+\cos C=0$，$\sin A+\sin B+\sin C=0$，求证：$\sin3A+\sin3B+\sin3C=3\sin(A+B+C)$。

(2)若令 $z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_1z_2-z_2z_3-z_3z_1=0$，则有 $z_1^3+z_2^3+z_3^3=3z_1z_2z_3$，据此也可以构造如下命题

已知 $\cos2A+\cos2B+\cos2C=\cos(A+B)+\cos(B+C)+\cos(C+A)$，$\sin2A+\sin2B+\sin2C=\sin(A+B)+\sin(B+C)+\sin(C+A)$；

求证：$\sin3A+\sin3B+\sin3C=3\sin(A+B+C)$（或者求证：$\cos3A+\cos3B+\cos3C=3\cos(A+B+C)$）。



例4 令 $z=\cos\theta+i\sin\theta,\theta\in\mathbf{R}$，则 $\bar{z}=\cos\theta-i\sin\theta$，联立 $\begin{cases} z=\cos\theta+i\sin\theta\\ \bar{z}=\cos\theta-i\sin\theta\end{cases}$ 可得

$\cos\theta=\frac{z+\bar{z}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$，$\sin\theta=\frac{z-\bar{z}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz}$，当然 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{z^2-1}{i(z^2+1)}$，

再由 $z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$，$\bar{z}^n=\cos n\theta-i\sin n\theta$，同上可知有

$\cos n\theta=\frac{z^n+\bar{z}^n}{2}=\frac{z^{2n}+1}{2\cdot z^n}$，$\sin n\theta=\frac{z^n-\bar{z}^n}{2i}=\frac{z^{2n}-1}{2iz^n}$，$\tan n\theta=\frac{z^{2n}-1}{i\cdot(z^{2n}+1)}$，

考查等式 $(z^2+1)(z^4+1)(z^8+1)\cdots(z^{2^n}+1)=1+z^2+z^4+z^6+\cdots+z^{2^{n+1}-2}$，

故 $\frac{z^2+1}{2z}\cdot\frac{z^4+1}{2\cdot z^2}\cdot\frac{z^8+1}{2\cdot z^4}\cdot\cdots\cdot\frac{z^{2^n}+1}{2\cdot z^{2^{n-1}}}$

$=\frac{1+z^2+z^4+z^6+\cdots+z^{2^{n+1}-2}}{2^n\cdot z^{2^n-1}}=\frac{1-(z^2)^{2^n}}{2^n\cdot z^{2^n-1}\cdot(1-z^2)}$

一方面，左边 $=\cos\theta\cdot\cos2\theta\cdot\cos4\theta\cdots\cos2^{n-1}\theta$。

另一方面：右边 $=\frac{1-\cos2^{n+1}\theta-i\sin2^{n+1}\theta}{2^n\cdot[\cos(2^n-1)\theta+i\sin(2^n-1)\theta]\cdot(1-\cos2\theta-i\sin2\theta)}$

$$=\frac{2\sin2^n\theta[\cos(2^n\theta-\frac{\pi}{2})+i\sin(2^n\theta-\frac{\pi}{2})]}{2^n\cdot[\cos(2^n-1)\theta+i\sin(2^n-1)\theta]\cdot2\sin\theta[\cos(\theta-\frac{\pi}{2})+i\sin(\theta-\frac{\pi}{2})]}$$

$=\frac{\sin2^n\theta}{2^n\sin\theta}$，

所以 $\cos\theta\cos2\theta\cos4\theta\cdots\cos2^{n-1}\theta=\frac{\sin2^n\theta}{2^n\sin\theta}$

利用上述等式可以产生一大批常见等式，如：

(1) $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}$；

(2) $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2}{5}\pi\cos\frac{3}{5}\pi\cos\frac{4}{5}\pi=\frac{1}{16}$；

（提示：$\cos\frac{3}{5}\pi=-\cos\frac{2}{5}\pi$，$\cos\frac{4}{5}\pi=-\cos\frac{\pi}{5}$）

(3) $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2}{9}\pi\cos\frac{4}{9}\pi=\frac{1}{8}$；

(4) $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2}{9}\pi\cos\frac{3}{9}\pi\cos\frac{4}{9}\pi\cos\frac{5}{9}\pi\cos\frac{6}{9}\pi\cos\frac{7}{9}\pi\cos\frac{8}{9}\pi=\frac{1}{256}$；

（提示：$\cos\frac{5}{9}\pi=-\cos\frac{4}{9}\pi$，$\cos\frac{7}{9}\pi=-\cos\frac{2}{9}\pi$，$\cos\frac{8}{9}\pi=-\cos\frac{2}{9}\pi$，$\cos\frac{6}{9}\pi=-\cos\frac{3}{9}\pi=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$）





(5) $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}=-\frac{1}{16}$;

(6) $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{16}$;

(7) $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3}{10}\pi=\frac{1}{4}$.

(提示：$\sin\frac{\pi}{10}=\cos\frac{2\pi}{5}$，$\sin\frac{3}{10}\pi=\cos\frac{\pi}{5}$)

当然读者还可以根据上述方法，构建出更多、更巧妙的式子.

**注** 式子的另一证明可采用如下方式

$$\cos\theta\cos2\theta\cos4\theta\cdots\cos2^{n-1}\theta=\frac{2^n\sin\theta\cdot\cos\theta\cos2\theta\cdots\cos2^{n-1}\theta}{2^n\sin\theta}$$

$$=\frac{2^{n-1}\sin2\theta\cos2\theta\cos4\theta\cdots\cos2^{n-1}\theta}{2^n\cdot\sin\theta}=\cdots=\frac{\sin2^n\theta}{2^n\sin\theta}$$

**例 5** 考查等式 $(2+i)(3+i)=5+5i$，及其表示出的辐角主值方面的几何意义，我们可以得到如下等式

(1) $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$；

(2) $\text{arccot}2+\text{arccot}3=\frac{\pi}{4}$；

(3) $\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}+\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\pi}{4}$；

(4) $\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}+\arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{\pi}{4}$；

(5) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}-\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\pi}{4}$；

(提示：$\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}+\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\pi}{2}$)

同样地考查等式 $(3+i)(5+i)(7+i)(8+i)=650+650i$，可得

(6) $\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$；

(7) $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}+\arcsin\frac{\sqrt{26}}{26}+\arccos\frac{7\sqrt{50}}{50}+\arccos\frac{8\sqrt{65}}{65}=\frac{\pi}{4}$，

等等

### §1.3.2 方程与根

$n$ 次实系数多项式有许多很好的初等性质，有时却不为人们所注意，下面我们就利用

$n$ 次实系数多项式方程来构造一批三角恒等式或不等式，主要基于以下三点.

1. 代数基本定理 $n$ 次实系数多项式方程在复数域上有且仅有 $n$ 个复根.

2. 若 $x_0$ 是 $n$ 次实系数多项式方程 $f(x)=0$ 的一个复根，则 $x-x_0$ 是 $f(x)$ 的一个因式.

3. 若 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 是 $n$ 次实系数多项式方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ $(a_n\neq 0)$ 的 $n$ 个复根，则

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+x_2x_4+\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \cdots\cdots \\ x_1x_2x_3\cdots x_n=(-1)^n\cdot\dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

即我们常常说的韦达定理.

**例 1** 我们知道 $z^7-1$ 的 7 个复根分别为 $1, \cos\dfrac{2}{7}\pi\pm i\sin\dfrac{2\pi}{7}, \cos\dfrac{4}{7}\pi\pm i\sin\dfrac{4}{7}\pi$, $\cos\dfrac{6}{7}\pi\pm i\sin\dfrac{6}{7}\pi$.

则 $z^7-1=(z-1)\left[z-\left(\cos\dfrac{2}{7}\pi+i\sin\dfrac{2}{7}\pi\right)\right]\left[z-\left(\cos\dfrac{2}{7}\pi-i\sin\dfrac{2}{7}\pi\right)\right]\left[z-\left(\cos\dfrac{4}{7}\pi+i\sin\dfrac{4}{7}\pi\right)\right]\left[z-\left(\cos\dfrac{4}{7}\pi-i\sin\dfrac{4}{7}\pi\right)\right]\left[z-\left(\cos\dfrac{6}{7}\pi+i\sin\dfrac{6}{7}\pi\right)\right]\left[z-\left(\cos\dfrac{6}{7}\pi-i\sin\dfrac{6}{7}\pi\right)\right]=(z-1)\left(z^2-2\cos\dfrac{2}{7}\pi z+1\right)\left(z^2-2\cos\dfrac{4}{7}\pi\cdot z+1\right)\left(z^2-2\cos\dfrac{6}{7}\pi\cdot z+1\right)$.

又由于 $z^7-1=(z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)$，故对于任意复数 $z$，均有

$\left(z^2-2\cos\dfrac{2}{7}\pi\cdot z+1\right)\left(z^2-2\cos\dfrac{4}{7}\pi\cdot z+1\right)\left(z^2-2\cos\dfrac{6}{7}\pi\cdot z+1\right)$

$=1+z+z^2+\cdots+z^6$

令 $z=\cos\theta+i\sin\theta, \theta\in\mathbf{R}$，则 $1+z^2-2\cos\dfrac{2}{7}\pi\cdot z$

$=1+\cos2\theta+i\cdot\sin2\theta-2\cos\dfrac{2}{7}\pi(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=2\cos\theta(\cos\theta+i\sin\theta)-2\cos\dfrac{2}{7}\pi(\cos\theta+i\sin\theta)=2\left(\cos\theta-\cos\dfrac{2}{7}\pi\right)\cdot z$,

同理 $1+z^2-2\cos\dfrac{4}{7}\pi\cdot z=2\left(\cos\theta-\cos\dfrac{4}{7}\pi\right)\cdot z$,





$1+z^2-2\cos\frac{6}{7}\pi\cdot z=2(\cos\theta-\cos\frac{6}{7}\pi)\cdot z$，

所以 $(\cos\theta-\cos\frac{2}{7}\pi)(\cos\theta-\cos\frac{4}{7}\pi)(\cos\theta-\cos\frac{6}{7}\pi)=\frac{1+z+z^2+\cdots+z^6}{8z^3}$

$=\frac{1}{8}[1+(z^3+\bar{z}^3)+(z^2+\bar{z}^2)+(z+\bar{z})]$

$=\frac{1}{8}[1+2\cos3\theta+2\cos2\theta+2\cos\theta]$.

这样，我们就得到了一个非常有用的恒等式：对于任意的 $\theta\in\mathbf{R}$，均有

(1) $(\cos\theta-\cos\frac{2}{7}\pi)(\cos\theta-\cos\frac{4}{7}\pi)(\cos\theta-\cos\frac{6}{7}\pi)$

$=\frac{1}{8}(1+2\cos\theta+2\cos2\theta+2\cos3\theta)$

(2) 在(1)中令 $\theta=0$，得 $(1-\cos\frac{2}{7}\pi)(1-\cos\frac{4}{7}\pi)(1-\cos\frac{6}{7}\pi)=\frac{7}{8}$，即

$\sin^2\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{2}{7}\pi\sin^2\frac{3}{7}\pi=\frac{7}{8}$，而 $\sin\frac{\pi}{7}>0,\sin\frac{2\pi}{7}>0,\sin\frac{3\pi}{7}>0$，

故 $\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{8}$.

(3) 在(1)中令 $\theta=\pi$，得 $(1+\cos\frac{2}{7}\pi)(1+\cos\frac{4}{7}\pi)(1+\cos\frac{6}{7}\pi)=\frac{1}{8}$，即

$\cos^2\frac{\pi}{7}\cos^2\frac{2\pi}{7}\cos^2\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{64}$，而 $\cos\frac{\pi}{7}>0,\cos\frac{2}{7}\pi>0,\cos\frac{3}{7}\pi>0$，

故 $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2}{7}\pi\cos\frac{3}{7}\pi=\frac{1}{8}$

(4) 由(2)、(3)可得 $\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7}=\sqrt{7}$.

(5) 在(1)中令 $\theta=\frac{\pi}{6}$，得 $(\sqrt{3}-2\cos\frac{2\pi}{7})(\sqrt{3}-2\cos\frac{4\pi}{7})(\sqrt{3}-2\cos\frac{6\pi}{7})=2+\sqrt{3}$.

(6) 在(1)中令 $\theta=\frac{\pi}{3}$，得 $(1-2\cos\frac{2}{7}\pi)(1-2\cos\frac{4}{7}\pi)(1-2\cos\frac{6}{7}\pi)=-1$

(7) 在(1)中令 $\theta=\frac{\pi}{4}$，得 $(\sqrt{2}-2\cos\frac{2}{7}\pi)(\sqrt{2}-2\cos\frac{4}{7}\pi)(\sqrt{2}-2\cos\frac{6}{7}\pi)=1$.

(8) 在(1)中令 $\theta=\frac{\pi}{2}$，得 $\cos\frac{2}{7}\pi\cos\frac{4}{7}\pi\cos\frac{6}{7}\pi=\frac{1}{8}$.

(9) 在(1)中令 $\theta=\frac{5}{6}\pi$，得 $(\sqrt{3}+2\cos\frac{2}{7}\pi)(\sqrt{3}+2\cos\frac{4}{7}\pi)(\sqrt{3}+2\cos\frac{6}{7}\pi)=\sqrt{3}-2$.



(10)在(1)中令 $\theta=\frac{2}{3}\pi$，得 $\left(1+2\cos\frac{2}{7}\pi\right)\left(1+2\cos\frac{4}{7}\pi\right)\left(1+2\cos\frac{6}{7}\pi\right)=-1$.

(11)在(1)中令 $\theta=\frac{3}{4}\pi$，得 $\left(\sqrt{2}+2\cos\frac{2}{7}\pi\right)\left(\sqrt{2}+2\cos\frac{4}{7}\pi\right)\left(\sqrt{2}+2\cos\frac{6}{7}\pi\right)=-1$.

(12)由(5)、(9)可知 $\left(3-4\cos^2\frac{2\pi}{7}\right)\left(3-4\cos^2\frac{4\pi}{7}\right)\left(3-4\cos^2\frac{6\pi}{7}\right)=-1$.

当然通过化简可知(12)与(6)是等价的.

(13)在(1)中令 $\theta=\frac{2}{7}\pi$，得 $1+2\cos\frac{2}{7}\pi+2\cos\frac{4}{7}\pi+2\cos\frac{6\pi}{7}=0$，即

$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$ 或 $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

**例 2** 我们来讨论例 1 的推广形式，$z^{2n+1}-1(n\in\mathbf{N}^*)$ 的 $2n+1$ 个复根分别为 1，$\cos\frac{2\pi}{2n+1}\pm i\sin\frac{2\pi}{2n+1}$，$\cos\frac{4\pi}{2n+1}\pm i\sin\frac{4\pi}{2n+1}$，$\cos\frac{6\pi}{2n+1}\pm i\sin\frac{6\pi}{2n+1}$，…，$\cos\frac{2n\pi}{2n+1}\pm i\sin\frac{2n\pi}{2n+1}$，则

$$
\begin{aligned}
z^{2n+1}-1&=(z-1)\left[z-\left(\cos\frac{2\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right]\left[z-\left(\cos\frac{2\pi}{2n+1}-i\sin\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right]\cdots\\
&\quad\left[z-\left(\cos\frac{2n\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2n\pi}{2n+1}\right)\right]\left[z-\left(\cos\frac{2n\pi}{2n+1}-i\sin\frac{2n\pi}{2n+1}\right)\right]\\
&=(z-1)(1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2n-1}+z^{2n}).
\end{aligned}
$$

故对于任意 $z\in\mathbf{C}$ 均有

$\left(z^2-2\cos\frac{2\pi}{2n+1}z+1\right)\left(z^2-2\cos\frac{4\pi}{2n+1}z+1\right)\left(z^2-2\cos\frac{6\pi}{2n+1}z+1\right)\cdots\left(z^2-2\cos\frac{2n\pi}{2n+1}z+1\right)=1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2n-1}+z^{2n}$.

令 $z=\cos\theta+i\sin\theta,\theta\in\mathbf{R}$，则

$$
\begin{aligned}
&\left(\cos\theta-\cos\frac{2\pi}{2n+1}\right)\left(\cos\theta-\cos\frac{4\pi}{2n+1}\right)\left(\cos\theta-\cos\frac{6\pi}{2n+1}\right)\cdots\left(\cos\theta-\cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right)\\
&=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1+z+z^2+\cdots+z^{2n-1}+z^{2n}}{z^n}=\frac{1}{2^n}\cdot\left[1+(z+\bar{z})+(z^2+\overline{z^2})+\cdots+(z^n+\overline{z^n})\right]\\
&=\frac{1}{2^n}(1+2\cos\theta+2\cos2\theta+2\cos3\theta+\cdots+2\cos n\theta).
\end{aligned}
$$

这样对于任意 $\theta\in\mathbf{R}$ 均有

(1) $\left(\cos\theta-\cos\frac{2\pi}{2n+1}\right)\left(\cos\theta-\cos\frac{4\pi}{2n+1}\right)\left(\cos\theta-\cos\frac{6\pi}{2n+1}\right)\cdots\left(\cos\theta-\cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2^n}(1+2\cos\theta+2\cos2\theta+2\cos3\theta+\cdots+2\cos n\theta)$.





(2)在(1)中令 $\theta=0$，得 $\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{3\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$.

(3)在(1)中令 $\theta=\pi$，得 $\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{3\pi}{2n+1}\cdots\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}$

(4)在(1)式中右边求和，得

$$\left(\cos\theta-\cos\frac{2\pi}{2n+1}\right)\left(\cos\theta-\cos\frac{4\pi}{2n+1}\right)\left(\cos\theta-\cos\frac{6\pi}{2n+1}\right)\cdots\left(\cos\theta-\cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2^n}\left[1+\frac{2\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right].$$

(5)在(4)中令 $\theta=\frac{\pi}{n+1}$，得

$$\left(\cos\frac{\pi}{n+1}-\cos\frac{2\pi}{n+1}\right)\left(\cos\frac{\pi}{n+1}-\cos\frac{4\pi}{n+1}\right)\left(\cos\frac{\pi}{n+1}-\cos\frac{6\pi}{n+1}\right)$$
$$\cdots\left(\cos\frac{\pi}{n+1}-\cos\frac{2n\pi}{n+1}\right)=\frac{1}{2^n}.$$

(6)在(4)中令 $\theta=\frac{\pi}{n}$，得

$$\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{2\pi}{2n+1}\right)\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{4\pi}{2n+1}\right)\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{6\pi}{2n+1}\right)$$
$$\cdots\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right)=-\frac{1}{2^n}.$$

(7)由(2)、(3)可知，$\tan\frac{\pi}{2n+1}\tan\frac{2\pi}{2n+1}\tan\frac{3\pi}{2n+1}\cdots\tan\frac{n\pi}{2n+1}=\sqrt{2n+1}$.

**例 3** 如同例 1、例 2，我们可以看到如下等式：

(1) $\left(z^2-2\cos\frac{\pi}{n}z+1\right)\left(z^2-2\cos\frac{2\pi}{n}z+1\right)\left(z^2-2\cos\frac{3\pi}{n}z+1\right)$

$\cdots\left(z^2-2\cos\frac{n-1}{n}\pi\cdot z+1\right)=1+z^2+z^4+z^6+\cdots+z^{2n-2}$；

(2) $\left(\cos\theta-\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\theta-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(\cos\theta-\cos\frac{3\pi}{n}\right)\cdots\left(\cos\theta-\cos\frac{n-1}{n}\pi\right)$

$=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot[2\cos(n-1)\theta+2\cos(n-3)\theta+2\cos(n-5)\theta+\cdots]$；

(3)在(1)中令 $z=1$，得 $\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$；

(4)在(1)中令 $z=-1$，得 $\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\cos\frac{3\pi}{2n}\cdots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$；

(5)由(3)、(4)可得 $\tan\frac{\pi}{2n}\tan\frac{2\pi}{2n}\tan\frac{3\pi}{2n}\cdots\tan\frac{n-1}{2n}\pi=1$(不过这是平凡的).

**例4** 考查方程 $z^3=\cos6\theta+i\sin6\theta,\theta\in\mathbb{R}$,则此方程的3个复根分别为 $\cos2\theta+i\sin2\theta$,$\cos\left(\frac{2}{3}\pi-2\theta\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\pi-2\theta\right)$,$\cos\left(\frac{2}{3}\pi+2\theta\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\pi+2\theta\right)$,故

(1) $z^3-\cos6\theta-i\sin6\theta=(z-\cos2\theta-i\sin2\theta)[z-\cos(\frac{2}{3}\pi-2\theta)-i\sin(\frac{2}{3}\pi-2\theta)][z-\cos(\frac{2}{3}\pi+2\theta)-i\sin(\frac{2}{3}\pi+2\theta)]$;

(2)在(1)中令 $z=1$,并比较等式左、右两边的模得:

$\sin3\theta=4\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$;

(3)在(1)中令 $z=-1$,并比较等式左、右两边的模得:

$\cos3\theta=4\cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$;

(4)由(2)、(3)可得:

$\tan3\theta=\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$;

(我们通过复数构造了(2)、(3)、(4)命题,由于 $\theta$ 取值的任意性与灵活性,据此可以构造一大批求值问题.)

(5)求值:$\sin10^\circ\sin50^\circ\sin70^\circ$;

(答:$\frac{1}{8}$)

(6)求值:$\cos5^\circ\cos55^\circ\cos65^\circ$;

(答:$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{16}$)

(7)求值:$\tan3^\circ\cot9^\circ\tan33^\circ\tan51^\circ\tan57^\circ\tan63^\circ\tan69^\circ\tan87^\circ$;

(答:1)

(8)求值:$\tan6^\circ\tan42^\circ\tan66^\circ\tan78^\circ$.

(答:1)

(提示:$\tan6^\circ\tan42^\circ\tan66^\circ\tan78^\circ=\frac{\tan6^\circ\tan54^\circ\tan66^\circ}{\tan54^\circ}\cdot\frac{\tan18^\circ\tan42^\circ\tan78^\circ}{\tan18^\circ}=\frac{\tan18^\circ}{\tan54^\circ}\cdot\frac{\tan54^\circ}{\tan18^\circ}=1$)

**例5** 设 $5\theta=2k\pi,k\in\mathbb{Z}$,则 $3\theta=2k\pi-2\theta$,故 $\cos3\theta=\cos2\theta$,即

$4\cos^3\theta-3\cos\theta=2\cos^2\theta-1$,整理得

$4\cos^3\theta-2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0$，令 $x=\cos\theta$，则

$x=1,\cos\dfrac{2}{5}\pi,\cos\dfrac{4}{5}\pi$ 是方程 $4x^3-2x^2-3x+1=0$ 的 3 个实根，即

$x=\cos\dfrac{2}{5}\pi,\cos\dfrac{4}{5}\pi$ 是方程 $4x^2+2x-1=0$ 的两根，故由韦达定理可得

(1) $\cos\dfrac{2}{5}\pi+\cos\dfrac{4}{5}\pi=-\dfrac{1}{2}$；

(2) $\cos\dfrac{2}{5}\pi\cdot\cos\dfrac{4}{5}\pi=-\dfrac{1}{4}$；

在(1)、(2)利用诱导公式，则有

(3) $\cos\dfrac{\pi}{5}-\cos\dfrac{2}{5}\pi=\dfrac{1}{2}$；

(4) $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2}{5}\pi=\dfrac{1}{4}$；

(5) $\sin\dfrac{\pi}{10}-\sin\dfrac{3}{10}\pi=-\dfrac{1}{2}$；

(6) $\sin\dfrac{\pi}{10}\sin\dfrac{3}{10}\pi=\dfrac{1}{4}$；

用角度表示之，则有

(7) $\cos36^\circ-\cos72^\circ=\sin54^\circ-\sin18^\circ=\dfrac{1}{2}$；

(8) $\cos36^\circ\cdot\cos72^\circ=\sin54^\circ\cdot\sin18^\circ=\dfrac{1}{4}$.

**例 6** 设 $7\theta=2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，则 $3\theta=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}-4\theta$，故 $\sin3\theta=\cos4\theta$，即

$3\sin\theta-4\sin^3\theta=\sin3\theta=\cos4\theta=2\cos^2 2\theta-1=2(1-2\sin^2\theta)^2-1=1-8\sin^2\theta+8\sin^4\theta$，
所以，$8\sin^4\theta+4\sin^3\theta-8\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0$。令 $x=\sin\theta$，则

$x=-1,\sin\dfrac{\pi}{14},-\sin\dfrac{3\pi}{14},\sin\dfrac{5\pi}{14}$ 为方程 $8x^4+4x^3-8x^2-3x+1=0$ 的根，也就有

$x=\sin\dfrac{\pi}{14},-\sin\dfrac{3\pi}{14},\sin\dfrac{5\pi}{14}$ 为方程 $8x^3-4x^2-4x+1=0$ 的根，由韦达定理可得：

(1) $\sin\dfrac{\pi}{14}-\sin\dfrac{3\pi}{14}+\sin\dfrac{5\pi}{14}=\dfrac{1}{2}$；

(2) $\sin\dfrac{\pi}{14}\sin\dfrac{5\pi}{14}-\sin\dfrac{\pi}{14}\sin\dfrac{3\pi}{14}-\sin\dfrac{3\pi}{14}\sin\dfrac{5\pi}{14}=-\dfrac{1}{2}$；

(3) $\sin\dfrac{\pi}{14}\sin\dfrac{3\pi}{14}\sin\dfrac{5\pi}{14}=\dfrac{1}{8}$；



利用诱导公式变换得

(4)$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$;

(5)$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}=-\frac{1}{2}$;

(6)$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}$.

**例 7** 设 $7\theta=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,则 $3\theta=k\pi-4\theta,k\in\mathbf{Z}$,故 $\tan3\theta=-\tan4\theta$.

所以 $\tan3\theta=\frac{\sin3\theta}{\cos3\theta}=\frac{3\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta}{\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta}=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$,

$$\tan4\theta=\frac{2\tan2\theta}{1-\tan^2 2\theta}=\frac{2\cdot\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}{1-\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)^2}=\frac{4\tan\theta-4\tan^3\theta}{1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta},$$

故 $\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}=-\frac{4\tan\theta-4\tan^3\theta}{1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta}$,即

$\tan^7\theta-21\tan^5\theta+35\tan^3\theta-7\tan\theta=0$,令 $t=\tan\theta$,这样

$t=0$、$\tan\frac{\pi}{7}$、$\tan\frac{2\pi}{7}$、$\tan\frac{3\pi}{7}$、$\tan\frac{4\pi}{7}$、$\tan\frac{5\pi}{7}$、$\tan\frac{6\pi}{7}$为方程 $t^7-21t^5+35t^3-7t=0$ 的 7 个根.所以 $\tan^2\frac{\pi}{7}$、$\tan^2\frac{2\pi}{7}$、$\tan^2\frac{3\pi}{7}$分别为方程 $t^3-21t^2+35t-7=0$ 的 3 个实根,这样由韦达定理可知:

(1)$\tan^2\frac{\pi}{7}+\tan^2\frac{2\pi}{7}+\tan^2\frac{3\pi}{7}=21$;

(2)$\tan^2\frac{\pi}{7}\tan^2\frac{2\pi}{7}+\tan^2\frac{2\pi}{7}\tan^2\frac{3\pi}{7}+\tan^2\frac{3\pi}{7}\tan^2\frac{\pi}{7}=35$;

(3)$\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7}=\sqrt{7}$.

我们将例 7 一般化,du得下例.

**例 8** 设$(2n+1)\theta=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,则 $\tan n\theta=-\tan(n+1)\theta\Leftrightarrow\tan n\theta+\tan(n+1)\theta=0$

$\Leftrightarrow\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}+\frac{\sin(n+1)\theta}{\cos(n+1)\theta}=0$

$\Leftrightarrow\sin n\theta\cos(n+1)\theta+\cos n\theta\sin(n+1)\theta=0\Leftrightarrow\sin(2n+1)\theta=0\Leftrightarrow C_{2n+1}^{1}\sin\theta\cos^{2n}\theta-C_{2n+1}^{3}\sin^3\theta\cos^{2n-2}\theta+C_{2n+1}^{5}\sin^5\theta\cos^{2n-4}\theta-\cdots+(-1)^nC_{2n+1}^{2n+1}\sin^{2n+1}\theta=0$,同除以 $\cos^{2n+1}\theta$ 得

$C_{2n+1}^{1}\tan\theta-C_{2n+1}^{3}\tan^3\theta+C_{2n+1}^{5}\tan^5\theta-\cdots+(-1)^nC_{2n+1}^{2n+1}\tan^{2n+1}\theta=0$.

令 $t=\tan\theta$,则 $t=0$、$\tan\frac{\pi}{2n+1}$、$\tan\frac{2\pi}{2n+1}$、$\cdots$、$\tan\frac{2n}{2n+1}\pi$ 为方程 $C_{2n+1}^{1}t-C_{2n+1}^{3}t^3+$

$C_{2n}^5 t^5-\cdots+(-1)^n C_{2n+1}^{2n+1}t^{2n+1}=0$ 的实根，故 $t=\tan^2\frac{\pi}{2n+1},\tan^2\frac{2\pi}{2n+1},\cdots,\tan^2\frac{n\pi}{2n+1}$ 为方程 $C_{2n+1}^1-C_{2n+1}^3 t+C_{2n+1}^5 t^2-\cdots+(-1)^n C_{2n+1}^{2n+1}t^n=0$ 的实根，利用韦达定理可得：

(1) $\tan^2\frac{\pi}{2n+1}+\tan^2\frac{2\pi}{2n+1}+\tan^2\frac{3\pi}{2n+1}+\cdots+\tan^2\frac{n\pi}{2n+1}=n(2n+1)$；

(2) $\sum\limits_{1\le i<j\le n}\tan^2\frac{i\pi}{2n+1}\tan^2\frac{j\pi}{2n+1}=\frac{n(n-1)(2n-1)(2n+1)}{6}$；

(3) $\tan\frac{\pi}{2n+1}\tan\frac{2\pi}{2n+1}\tan\frac{3\pi}{2n+1}\cdots\tan\frac{n\pi}{2n+1}=\sqrt{2n+1}$.

**注** 当 $(2n+1)\theta=k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 时，我们有 $C_{2n+1}^1\sin\theta\cos^{2n}\theta-C_{2n+1}^3\sin^3\theta\cos^{2n-2}\theta+\cdots+(-1)^n C_{2n+1}^{2n+1}\sin^{2n+1}\theta=0$.

令 $x=\sin^2\theta$，则 $x=\sin^2\frac{\pi}{2n+1},\sin^2\frac{2\pi}{2n+1},\cdots,\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}$ 是方程 $C_{2n+1}^1(1-x)^n-C_{2n+1}^3\cdot x\cdot(1-x)^{n-1}+\cdots+(-1)^n C_{2n+1}^{2n+1}x^n=0$ 的 $n$ 个实根.

又设 $f(x)=C_{2n+1}^1(1-x)^n-C_{2n+1}^3 x\cdot(1-x)^{n-1}+\cdots+(-1)^n C_{2n+1}^{2n+1}x^n$

$=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0\ (a_n\neq0)$，

则 $a_n=(-1)^n C_{2n+1}^1-(-1)^{n-1}C_{2n+1}^3+\cdots+(-1)^n C_{2n+1}^{2n+1}$

$=(-1)^n(C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1})=(-1)^n\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^{2n+1}=(-1)^n\cdot 2^{2n}$，

$a_0=C_{2n+1}^1=2n+1$，

再由韦达定理可知，$\sin^2\frac{\pi}{2n+1}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}=(-1)^n\cdot\frac{a_0}{a_n}=\frac{2n+1}{2^{2n}}$，即

$\sin\frac{\pi}{2n+1}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\sin\frac{3\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$.

# §1.4 变 换

数学问题层出不穷，许多问题一见有如"岁岁年年花相似"的亲切感，细做又有"年年岁岁人不同"的新颖感，其实这类命题通常都采用变换的方式构造出来的. 这里我们介绍两种构造三角函数问题的常用变换方法——变换命题的叙述方式与变换命题的题设与结论.



### §1.4.1 变换命题的叙述方式

数学语言丰富多彩，命题的叙述方式多种多样，有选择题、求值化简，或反之变为解方程等等。另外，数学语言中"语种"繁多，几乎每个分支都有自己一套独特的语言，而数学本质在许多时候是相通的。将同一个实质描述成不同的语言，有时不光形式上不尽相同，还会在解决问题的难度上大相径庭。这样就为我们采用变换命题的叙述方式来重新构造命题，提供可行性支持。同时，这样的命题方式也备受命题者的青睐，因为这样的命题一般有两种解决方案：一种是采用新"语种"环境中正常的解决方法，另一种是采用构造法来还原命题途径，显示出命题多入口、多包容的特性。

**例1** 设 $a>b>0$，$\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，$a\tan\beta=b\tan\alpha$，求 $\alpha-\beta$ 的最大值。

这是一道三角函数与平均值不等式相结合的容易题，解答如下：

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\tan\alpha-\frac{b}{a}\tan\alpha}{1+\tan\alpha\cdot\frac{b}{a}\tan\alpha}=\frac{a-b}{\frac{a}{\tan\alpha}+b\tan\alpha}\leqslant\frac{a-b}{2\sqrt{\frac{a}{\tan\alpha}\cdot b\tan\alpha}}$$

$=\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$，当且仅当 $\tan\alpha=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时取"="，又 $\alpha-\beta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，

故 $\alpha-\beta$ 的最大值为 $\arctan\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$。

(1)如果将之放入向量的背景下来叙述，则有：

已知 $a>b>0$，$\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\boldsymbol{a}=(a,b)$，$\boldsymbol{b}=(\tan\alpha,\tan\beta)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求 $\alpha-\beta$ 的最大值。

（提示：$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a\tan\beta=b\tan\alpha$）

(2)如果将这个问题放入复数的背景下来叙述，则有：

已知 $a>b>0$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，复数 $z=a+b\tan\theta\cdot i$，求 $\theta-\arg z$ 的最大值。

（提示：由题意可知：$\arg z\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $\tan(\arg z)=\frac{b\tan\theta}{a}=\frac{b}{a}\tan\theta$，即转化为原来命题形式。）

(3)如果将这个问题放入椭圆的背景下来叙述，则有：

如图1-12，$P$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 在第一象限内的一点，点 $P$ 的离心角为 $\alpha$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$，及 $\angle xOP=\beta$，求 $\alpha-\beta$ 的最大值。





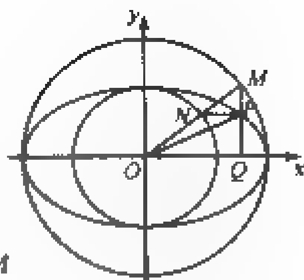


图1 12

提示：如图，由于点 $P$ 的离心角为 $\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$，则 $\angle MOx=\alpha$.

点 $P$ 的坐标为 $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$，这样

$\tan\beta=\frac{|PQ|}{|OQ|}=\frac{b\sin\alpha}{a\cos\alpha}=\frac{b}{a}\tan\alpha$，即转化为原来命题形式.

(4)如果将这个问题放入平面几何的背景下来叙述，则有：

如图1 13，$M$ 为 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 上任一点，连接 $OM$ 交 $\overset{\frown}{B_1B_2}$ 于 $N$，过 $M$ 作 $MP\perp OA_1$，过 $N$ 作 $NP\perp MP$ 于 $P$，设 $OA_1=a$，$OB_1=b$，求 $\angle MOP$ 的最大值

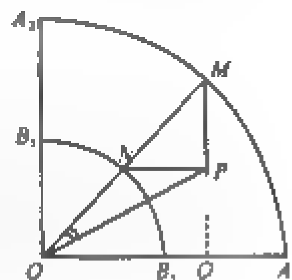


图1 13

提示：与(3)相同，设 $\angle MOA_1=\alpha$，$\angle POQ=\beta$，则

$\tan\beta=\frac{|PQ|}{|OQ|}=\frac{b\sin\alpha}{a\cos\alpha}=\frac{b}{a}\tan\alpha$.

**注**　以上实质上是同一问题，关键是 $a\tan\beta=b\tan\alpha$ 如何体现出来，是直接给出，还是间接给出，以怎样的方式给出，这成为命题的一个切入点．当然问题给出方式中还有隐藏条件的深浅之分，在上例中(1)、(2)、(3)、(4)隐藏逐步加深，这样问题难度就加大了.

**例2**　在△ABC 中，$a$、$b$、$c$ 为角 $A$、$B$、$C$ 所对应的三边，且 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $\frac{a^2-b^2}{c^2}+\frac{b^2-c^2}{a^2}+\frac{c^2-a^2}{b^2}\geqslant 0$.

事实上，$\frac{a^2-b^2}{c^2}+\frac{b^2-c^2}{a^2}+\frac{c^2-a^2}{b^2}\geqslant 0$

$\Leftrightarrow a^2b^2(a^2-b^2)+b^2c^2(b^2-c^2)+c^2a^2(c^2-a^2)\geqslant 0$.

而 $a^2b^2(a^2-b^2)+b^2c^2(b^2-c^2)+c^2a^2(c^2-a^2)$

$=a^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)+c^2(b^2-c^2)(b^2-a^2)=(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)\geqslant 0$，

对上述不等式使用正弦定理，则有：

$$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin^2A-\sin^2B}{\sin^2C}=\frac{-\frac{1}{2}(\cos2A-\cos2B)}{\sin^2C}=\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin^2C}$$

$$=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$$

这样就可以将之改为一个三角不等式：

在△ABC 中，$A\geqslant B\geqslant C$，则 $\frac{\sin(A-B)}{\sin C}+\frac{\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{\sin(C-A)}{\sin B}\geqslant 0$.

我们若用 $(a,b,c)$ 代替原来代数不等式中的 $(a^2,b^2,c^2)$，则有

在△ABC 中，$a\geqslant b\geqslant c$，则 $\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\geqslant 0$



再用正弦定理，又可得一个三角不等式：

在△$ABC$ 中，$A\geqslant B\geqslant C$，则 $\dfrac{\sin A-\sin B}{\sin C}+\dfrac{\sin B-\sin C}{\sin A}+\dfrac{\sin C-\sin A}{\sin B}\geqslant 0$.

那么，这两个三角不等式又是哪个更大呢？我们又可以得到一个新的三角不等式：

在△$ABC$ 中，$A\geqslant B\geqslant C$，

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin C}+\frac{\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{\sin(C-A)}{\sin B}\geqslant\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}+\frac{\sin B-\sin C}{\sin A}+\frac{\sin C-\sin A}{\sin B}.$$

事实上，上述不等式 $\Leftrightarrow \dfrac{b^2-c^2}{a^2}+\dfrac{c^2-a^2}{b^2}+\dfrac{a^2-b^2}{c^2}\geqslant\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}\Leftrightarrow$

$$\frac{(a-b)(a+b-c)}{c^2}+\frac{(b-c)(b+c-a)}{a^2}+\frac{(c-a)(c+a-b)}{b^2}\geqslant 0.$$

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\left[\frac{(a-b)(a+b-c)}{c^2}-\frac{(a-b)(c+a-b)}{b^2}\right]\\&\quad+\left[\frac{(b-c)(b+c-a)}{a^2}+\frac{(c-b)(c+a-b)}{b^2}\right]\\&=\frac{(a-b)(b-c)(b^2+c^2+ab+ac)}{b^2c^2}+\frac{(b-c)(b-a)(a^2+b^2+bc+ca)}{a^2b^2}\\&=(a-b)(b-c)(c-a)\cdot\frac{[(a+c)(b^2+ca)+b(a^2+ca+c^2)]}{a^2b^2c^2}\geqslant 0.\end{aligned}$$

**例 3** 如图 1-14，锐角△$ABC$ 的垂足△$DEF$.

(1)由于 $B$、$F$、$E$、$C$ 四点共圆，故 $\angle AFE=\angle ACB$，$\angle AEF=\angle ABC$，这样△$AEF\backsim$△$ABC$，故 $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{AF}{AC}=\cos A$.

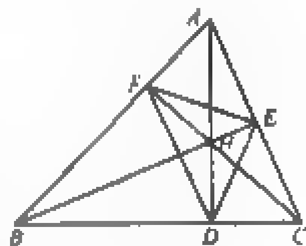


图 1-14

所以，$EF=a\cos A$，同理，$FD=b\cos B$，$DE=c\cos C$.

在平面几何中，我们知道，锐角三角形的内接三角形的周长以该锐角三角形的垂足三角形的周长最小，这样可以构造问题：

设 $D_1$、$E_1$、$F_1$ 分别为锐角△$ABC$ 的边 $BC$、$CA$、$AB$ 上的点，则△$D_1E_1F_1$ 周长的最小值为______.

（答：$a\cos A+b\cos B+c\cos C$）

(2)由于 $A,B,C\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，故 $(a,b,c)$ 与 $(\cos A,\cos B,\cos C)$ 反序，这样

$b\cos B+c\cos C\leqslant b\cos C+c\cos B=a$（射影定理）.

即 $DF+DE\leqslant BC$

同理，$ED+EF\leqslant AC$，$FE+FD\leqslant AB$.

累加即可得△$DEF$ 周长不超过△$ABC$ 周长的一半.

构造问题 $a\cos A+b\cos B+c\cos C\leqslant \frac{1}{2}(a+b+c)$.

**证明** 由于$(a,b,c)$与$(\cos A,\cos B,\cos C)$反序,故利用契比雪夫不等式得:

$a\cos A+b\cos B+c\cos C\leqslant \frac{(a+b+c)(\cos A+\cos B+\cos C)}{3}$.

又由于 $\cos A+\cos B+\cos C\leqslant \frac{3}{2}$,这样又得 $a\cos A+b\cos B+c\cos C\leqslant \frac{a+b+c}{2}$.

(3)由(2)的证明可知,可将问题推广如下:

设 $r>0$,其余条件如上,则有 $a^r\cos A+b^r\cos B+c^r\cos C\leqslant \frac{1}{2}(a^r+b^r+c^r)$

(4)考虑不等式 $a\cos A+b\cos B+c\cos C\leqslant \frac{1}{2}(a+b+c)$等号成立的条件以及由排序不等式知 $a\cos A+b\cos B+c\cos C\leqslant a\cos B+b\cos C+c\cos A$.

与之类似,我们可以构造如下问题:

$a\cos B+b\cos C+c\cos A=\frac{1}{2}(a+b+c)$的充要条件是$\triangle ABC$为等腰三角形.

**证明** $a\cos B+b\cos C+c\cos A=\frac{a+b+c}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sin A\cos B+2\sin B\cos C+2\sin C\cos A=\sin A+\sin B+\sin C$

$\Leftrightarrow \sin A+\sin B+\sin C=\sin(A+B)+\sin(A-B)+\sin(B+C)+\sin(B-C)$
$\quad +\sin(C+A)+\sin(C-A)$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)+\sin(B-C)+\sin(C-A)=0$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A-C}{2}\cos\frac{A+C-2B}{2}+2\sin\frac{C-A}{2}\cos\frac{C-A}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A-C}{2}\left(\cos\frac{A+C-2B}{2}-\cos\frac{C-A}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow -4\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{C-B}{2}\sin\frac{A-B}{2}=0$

$\Leftrightarrow \sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}=0$.

又因为$\frac{A-B}{2}$、$\frac{B-C}{2}$、$\frac{C-A}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}=0\Leftrightarrow A=B$ 或 $B=C$ 或 $C=A\Leftrightarrow\triangle ABC$为等腰三角形

注 此问题容易犯取"="仅适用等边三角形的错误.

(5)由$A$、$F$、$D$、$C$四点共圆,及$A$、$E$、$D$、$B$四点共圆可知,$\angle BDF=\angle CDE=A$,故



$\angle EDA=\angle FDA=\frac{\pi}{2}-A$.

同理 $\angle DEB=\angle FEB=\frac{\pi}{2}-B$，$\angle EFC=\angle DFC=\frac{\pi}{2}-C$.

所以 $H$ 是$\triangle DEF$ 的内心，$\angle EDF=\pi-2A$，$\angle DEF=\pi-2B$，$\angle EFD=\pi-2C$. 设$\triangle DEF$ 的外接圆半径为 $R_0$，那么在$\triangle DEF$ 中，由正弦定理可知：

$2R_0=\frac{EF}{\sin(\pi-2A)}=\frac{a\cos A}{\sin 2A}=\frac{2R\sin A\cos A}{\sin 2A}=R$，即 $R_0=\frac{1}{2}R$.

而$\triangle DEF$ 的外接圆即为$\triangle ABC$ 的九点圆，这样我们就证明了平面几何中的一个结论：

三角形的九点圆半径为其外接圆半径的一半

接着考察$\triangle DEF$ 的面积，一方面，由面积公式可知：$S_{\triangle DEF}=\frac{a\cos A\cdot b\cos B\cdot c\cos C}{4R_0}$；

另一方面，$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AEF}-S_{\triangle BDF}-S_{\triangle CDE}$

$=S_{\triangle ABC}-\cos^2 AS_{\triangle ABC}-\cos^2 BS_{\triangle ABC}-\cos^2 CS_{\triangle ABC}$

$=(1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C)S_{\triangle ABC}=(1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C)\cdot\frac{abc}{4R}$，

再将 $R_0=\frac{1}{2}R$ 代入可得：$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$.

这样可以构造以下问题

在$\triangle ABC$ 中，求证：$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$.

或在$\triangle ABC$ 中，$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=$ ________.

(6)在图 1-14 中，我们有：$BD=c\cos B$，$BF=a\cos B$，$DH=BD\cot C=c\cot B\cot C$，$HF=BF\cdot\cot A=a\cos B\cot A$，

$BC=\frac{BD}{\sin C}=\frac{c\cos B}{\sin C}=\frac{a\cos B}{\sin A}$.

又由于 $B$、$D$、$H$、$F$ 四点共圆，且 $BC$ 为直径，故 $BC=\frac{DF}{\sin(A+C)}=\frac{b\cos B}{\sin B}$，

再由托勒密定理可知：$BD\cdot FH+BF\cdot DH=BC\cdot DF$，

即 $c\cos B\cdot a\cos B\cot A+a\cos B\cdot c\cos B\cot C=\frac{b\cos B}{\sin B}b\cos B$，

即 $b^2=ac(\cot A+\cot C)\sin B$.

这样可构造问题：

在$\triangle ABC$ 中，求证 $a\sin B$、$b$、$c(\cot A+\cot C)$依次成等比数列.

(7)在图 1-14 中，$S_{\triangle ABC}=S_{\text{四边形}AEHF}+S_{\text{四边形}CEHD}+S_{\text{四边形}BDHF}\leqslant\frac{1}{2}EF\cdot AH+$



$\frac{1}{2}DE\cdot HC+\frac{1}{2}BH\cdot DF=\frac{1}{2}\left(\frac{ab\cos^2A}{\sin B}+\frac{ca\cos^2C}{\sin A}+\frac{bc\cos^2B}{\sin C}\right)$.

故 $4R^2\sin A\sin B\sin C\leqslant\frac{ab\cos^2A}{\sin B}+\frac{ca\cos^2C}{\sin A}+\frac{bc\cos^2B}{\sin C}$

$\Leftrightarrow\frac{\cos^2A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos^2B}{\sin C\sin A}+\frac{\cos^2C}{\sin A\sin B}\geqslant1$.

这样可构造问题：

在锐角$\triangle ABC$中，求证：$\frac{\cos^2A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos^2B}{\sin C\sin A}+\frac{\cos^2C}{\sin A\sin B}\geqslant1$.

(8)在图1-14中，$2(S_{\triangle BFC}+S_{\triangle BEC})=BC\cdot DF\cdot\sin\angle BDF+BC\cdot DE\cdot\sin\angle CDE$
$BC\cdot DF\cdot\sin A+BC\cdot DE\cdot\sin A=BC\cdot(DF+DE)\cdot\sin A\leqslant BC^2\sin A=a^2\sin A=4R^2\sin^3A$；

同理，$2(S_{\triangle ADC}+S_{\triangle AFC})\leqslant4R^2\sin^3B$，$2(S_{\triangle AEB}+S_{\triangle ADB})\leqslant4R^2\sin^3C$.

而 $2(S_{\triangle BFC}+S_{\triangle BEC})+2(S_{\triangle ADC}+S_{\triangle AFC})+2(S_{\triangle AEB}+S_{\triangle ADB})=6S_{\triangle ABC}$

$=6\cdot2R^2\sin A\sin B\sin C$.

故 $3\sin A\sin B\sin C\leqslant\sin^3A+\sin^3B+\sin^3C$，这是一个平凡的不等式.

我们考察不等式的另一面：

$2(S_{\triangle BFC}+S_{\triangle BEC})=BC\cdot(DF+DE)\sin A\geqslant(DF+DE)^2\sin A$，

$=(b\cos B+c\cos C)^2\sin A=R^2(\sin2B+\sin2C)^2\sin A$.

同理，$2(S_{\triangle ADC}+S_{\triangle AFC})\geqslant R^2(\sin2C+\sin2A)^2\sin B$，

$2(S_{\triangle AEB}+S_{\triangle ADB})\geqslant R^2(\sin2A+\sin2B)^2\sin C$，

三式相加得：

$(\sin2A+\sin2B)^2\sin C+(\sin2B+\sin2C)^2\sin A+(\sin2C+\sin2A)^2\sin B$

$\leqslant12\sin A\sin B\sin C$.

这样可得问题：

在锐角$\triangle ABC$中，求证：

$(\sin2A+\sin2B)^2\sin C+(\sin2B+\sin2C)^2\sin A+(\sin2C+\sin2A)^2\sin B$

$\leqslant12\sin A\sin B\sin C$；

或：在锐角$\triangle ABC$中，求证：

$\frac{(\sin2A+\sin2B)^2}{\sin A\sin B}+\frac{(\sin2B+\sin2C)^2}{\sin B\sin C}+\frac{(\sin2C+\sin2A)^2}{\sin C\sin A}\leqslant12$.

**注** 在锐角$\triangle ABC$中，求证：$(\sin2B+\sin2C)^2\sin A+(\sin2C+\sin2A)^2\sin B+(\sin2A+\sin2B)^2\sin C\leqslant12\sin A\sin B\sin C$.

**证明** $(\sin2B+\sin2C)^2\sin A=4\sin^2(B+C)\cos^2(B-C)\sin A=4\sin^3A\cos^2(B-C)$.

同理，$(\sin2C+\sin2A)^2\sin B=4\sin^3B\cos^2(C-A)$，



$(\sin 2A+\sin 2B)^2\sin C=4\sin^3 C\cos^2(A-B)$，

故 $(\sin 2B+\sin 2C)^2\sin A+(\sin 2C+\sin 2A)^2\sin B+(\sin 2A+\sin 2B)^2\sin C$

$=4[\sin^3 A\cos^2(B-C)+\sin^3 B\cos^2(C-A)+\sin^3 C\cos^2(A-B)]$.

在$\triangle ABC$中，有恒等式：

$\sin^3 A\cos(B-C)+\sin^3 B\cos(C-A)+\sin^3 C\cos(A-B)=3\sin A\sin B\sin C$.

事实上，$\sin^3 A\cos(B-C)=\sin^2 A\sin(B+C)\cos(B-C)=\frac{1}{2}\sin^2 A(\sin 2B+\sin 2C)$

$=\frac{1}{4}(1-\cos 2A)(\sin 2B+\sin 2C)=\frac{1}{4}[(\sin 2B+\sin 2C)-\sin 2B\cos 2A-\sin 2C\cos 2A]$.

同理，$\sin^3 B\cos(C-A)=\frac{1}{4}[(\sin 2C+\sin 2A)-\sin 2C\cos 2B-\sin 2A\cos 2B]$，

$\sin^3 C\cos(A-B)=\frac{1}{4}[(\sin 2A+\sin 2B)-\sin 2A\cos 2C-\sin 2B\cos 2C]$，

故 $\sin^3 A\cos(B-C)+\sin^3 B\cos(C-A)+\sin^3 C\cos(A-B)$

$=\frac{1}{4}[2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)-(\sin 2B\cos 2A+\sin 2A\cos 2B)-(\sin 2C\cos 2A+\sin 2A\cos 2C)-(\sin 2C\cos 2B+\sin 2B\cos 2C)]$

$=\frac{1}{4}[2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)-\sin(2A+2B)-\sin 2(C+A)-\sin 2(B+C)]$

$=\frac{3}{4}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=3\sin A\sin B\sin C$.

又因为 $A、B、C\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\cos(A-B),\cos(B-C),\cos(C-A)>0$.

故 $\sin^3 A\cos^2(B-C)+\sin^3 B\cos^2(C-A)+\sin^3 C\cos^2(A-B)$

$\leqslant\sin^3 A\cos(B-C)+\sin^3 B\cos(C-A)+\sin^3 C\cos(A-B)$

$=3\sin A\sin B\sin C$.

综上可知：$(\sin 2B+\sin 2C)^2\sin A+(\sin 2C+\sin 2A)^2\sin B+(\sin 2A+\sin 2B)^2\sin C\leqslant 12\sin A\sin B\sin C$.

当然，证明这个三角函数不等式有一定的难度，但我们如果熟知三角形内的恒等式

$\sin^3 A\cos(B-C)+\sin^3 B\cos(C-A)+\sin^3 C\cos(A-B)=3\sin A\sin B\sin C$.

那就显得容易多了.

**例4** 如图1.5，锐角$\triangle ABC$的外接圆的圆心为$O$，半径为$R$，$AO$交$\triangle BOC$的外接圆于点$A_1$，$BO$交$\triangle COA$的外接圆于点$B_1$，$CO$交$\triangle AOB$的外接圆于点$C_1$，求证：

$OA_1\cdot OB_1\cdot OC_1\geqslant 8R^3$.

**证明** $O,B,A_1,C$四点共圆$\Rightarrow\angle OBC=\angle OA_1C$ $\Big\}\Rightarrow$

$\angle OCB=\angle OBC$





$$\left.\begin{array}{l}\angle OCB=\angle OA_1C\\ \angle AOC=\angle MOC\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \triangle MOC\backsim\triangle COA_1\Rightarrow \frac{OM}{OC}=\frac{OC}{OA_1}\Rightarrow OA_1=\frac{OC^2}{OM}=\frac{R^2}{OM}.$$

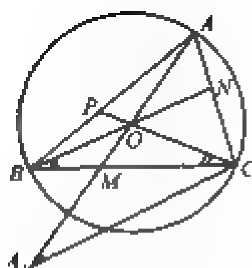



图 1-15

同理可证：$OB_1=\frac{R^2}{ON}, OC_1=\frac{R^2}{OP}$.

故 $OA_1\cdot OB_1\cdot OC_1=\frac{R^6}{OM\cdot ON\cdot OP}$

$=\frac{OA}{OM}\cdot\frac{OB}{ON}\cdot\frac{OC}{OP}\cdot R^3\geqslant 8R^3$.

事实上，对于$\triangle ABC$内任意一点$O$均有$\frac{OA}{OM}\cdot\frac{OB}{ON}\cdot\frac{OC}{OP}\geqslant 8$，当且仅当$O$为重心时取“$=$”.

因为$\frac{OM}{AM}+\frac{ON}{BN}+\frac{OP}{CP}=\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ABC}}=1$.

令 $\frac{OM}{AM}=x, \frac{ON}{BN}=y, \frac{OP}{CP}=z$，则$\frac{OA}{OM}=\frac{1-x}{x}, \frac{OB}{ON}=\frac{1-y}{y}, \frac{OC}{OP}=\frac{1-z}{z}$，且$x+y+z=1, x,y,z\in\mathbf{R}^+$.

所以$\frac{OA}{OM}\cdot\frac{OB}{ON}\cdot\frac{OC}{OP}=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1-y}{y}\cdot\frac{1-z}{z}=\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{xyz}$

$\geqslant\frac{2\sqrt{yz}\cdot 2\sqrt{zx}\cdot 2\sqrt{xy}}{xyz}=8$.

当且仅当$x=y=z=\frac{1}{3}$时取“$=$”，此时$O$为$\triangle ABC$的重心，对于本题而言，取得等号时重心与外心重合，此时$\triangle ABC$为正三角形.

对于本题，若从另一个角度考虑，在$\triangle OA_1C$中，$\angle OA_1C=\angle OBC=\angle OCB=\frac{\pi}{2}-A$，$\angle OCA_1=\angle OCB+\angle BCA_1=\frac{\pi}{2}-A+\pi-2C=\frac{3}{2}\pi-A-2C$.

又由正弦定理知，$\frac{OC}{\sin\angle OA_1C}=\frac{OA_1}{\sin\angle OCA_1}$，

故 $OA_1=R\cdot\frac{\sin(\frac{3}{2}\pi-A-2C)}{\sin(\frac{\pi}{2}-A)}=R\cdot\frac{\cos(C-B)}{\cos A}$，

同理可得：$OB_1=\frac{\cos(A-C)}{\cos B}R, OC_1=\frac{\cos(B-A)}{\cos C}R$.



这样 $OA_1 \cdot OB_1 \cdot OC_1 = \frac{\cos(C-B)}{\cos A} \cdot \frac{\cos(A-C)}{\cos B} \cdot \frac{\cos(B-A)}{\cos C} \cdot R^3$.

我们再换一个角度．在 $\triangle A_1BC$ 中，$\angle BA_1C = \pi - \angle BOC = \pi - 2A$，$\angle CBA_1 = \angle A_1OC = \pi - \angle AOC = \pi - 2B$.

同理，$\angle BCA_1 = \pi - 2C$，由正弦定理可知：

$$\frac{A_1B + A_1C}{BC} = \frac{\sin 2C + \sin 2B}{\sin 2A}.$$

在 $\triangle BOC$ 的外接圆中，由托勒密定理可知：

$$OA_1 = \frac{A_1B \cdot OC + A_1C \cdot OB}{BC} = R \cdot \frac{A_1B + A_1C}{BC} = R \cdot \frac{\sin 2C + \sin 2B}{\sin 2A}.$$

同理，$OB_1 = \frac{\sin 2C + \sin 2A}{\sin 2B} R$，$OC_1 = \frac{\sin 2A + \sin 2B}{\sin 2C} R$.

这样，$OA_1 \cdot OB_1 \cdot OC_1 = \frac{(\sin 2A + \sin 2B)(\sin 2B + \sin 2C)(\sin 2C + \sin 2A)}{\sin 2A \sin 2B \sin 2C} R^3$.

从上面的分析中我们可以得出一个漂亮的等式及两个漂亮的不等式，在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：

(1) $\frac{(\sin 2A + \sin 2B)(\sin 2B + \sin 2C)(\sin 2C + \sin 2A)}{\sin 2A \sin 2B \sin 2C}$

$= \frac{\cos(C-B)\cos(A-C)\cos(B-A)}{\cos A \cos B \cos C}$；

(2) $\frac{(\sin 2A + \sin 2B)(\sin 2B + \sin 2C)(\sin 2C + \sin 2A)}{\sin 2A \sin 2B \sin 2C} \geqslant 8$；

(3) $\frac{\cos(C-B)\cos(A-C)\cos(B-A)}{\cos A \cos B \cos C} \geqslant 8$.

**注** 在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：

(1) $\frac{\cos(C-B)}{\cos A} \cdot \frac{\cos(A-C)}{\cos B} \cdot \frac{\cos(B-A)}{\cos C} = \frac{(\sin 2A + \sin 2B)(\sin 2B + \sin 2C)(\sin 2C + \sin 2A)}{\sin 2A \sin 2B \sin 2C}$；

(2) $\frac{\cos(C-B)}{\cos A} \cdot \frac{\cos(A-C)}{\cos B} \cdot \frac{\cos(B-A)}{\cos C} \geqslant 8$.

**证明** (1) $\frac{\cos(C-B)}{\cos A} = \frac{2\cos(C-B)\sin A}{2\cos A \sin A} = \frac{2\cos(C-B)\sin(C+B)}{2\cos A \sin A} = \frac{\sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A}$.

同理，$\frac{\cos(A-C)}{\cos B} = \frac{\sin 2C + \sin 2A}{\sin 2B}$，$\frac{\cos(B-A)}{\cos C} = \frac{\sin 2A + \sin 2B}{\sin 2C}$.

所以，$\frac{\cos(C-B)}{\cos A} \cdot \frac{\cos(A-C)}{\cos B} \cdot \frac{\cos(B-A)}{\cos C}$

$= \frac{(\sin 2A + \sin 2B)(\sin 2B + \sin 2C)(\sin 2C + \sin 2A)}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}$





(2) 方法1　由(1)可知，$\frac{\cos(C-B)}{\cos A}=\frac{\sin 2B+\sin 2C}{\sin 2A}\geqslant\frac{2\sqrt{\sin 2B\cdot\sin 2C}}{\sin 2A}$.

同理，$\frac{\cos(A-C)}{\cos B}\geqslant\frac{2\sqrt{\sin 2C\cdot\sin 2A}}{\sin 2B}$，$\frac{\cos(B-A)}{\cos C}\geqslant\frac{2\sqrt{\sin 2A\cdot\sin 2B}}{\sin 2C}$.

所以　$\frac{\cos(C-B)}{\cos A}\cdot\frac{\cos(A-C)}{\cos B}\cdot\frac{\cos(B-A)}{\cos C}$

$\geqslant\frac{2\sqrt{\sin 2B\sin 2C}}{\sin 2A}\cdot\frac{2\sqrt{\sin 2C\sin 2A}}{\sin 2B}\cdot\frac{2\sqrt{\sin 2A\sin 2B}}{\sin 2C}=8$.

方法2　$\frac{\cos(C-B)}{\cos A}=\frac{\cos(C-B)}{-\cos(B+C)}=\frac{\cos B\cos C+\sin B\sin C}{-\cos B\cos C+\sin B\sin C}=\frac{1+\tan B\tan C}{\tan B\tan C-1}$.

同理，$\frac{\cos(A-C)}{\cos B}=\frac{1+\tan C\tan A}{\tan C\tan A-1}$，$\frac{\cos(B-A)}{\cos C}=\frac{1+\tan A\tan B}{\tan A\tan B-1}$.

由于在$\triangle ABC$中有 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$，

即 $\frac{1}{\tan A\tan B}+\frac{1}{\tan B\tan C}+\frac{1}{\tan C\tan A}=1$.

令 $x=\frac{1}{\tan A\tan B}$，$y=\frac{1}{\tan B\tan C}$，$z=\frac{1}{\tan C\tan A}$，则

原不等式等价于：$x,y,z>0$，$x+y+z=1$，求证：$\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1}\cdot\frac{1+\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}-1}\cdot\frac{1+\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}-1}\geqslant 8$.

由于 $\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1}=\frac{x+1}{1-x}=\frac{x+(x+y+z)}{(x+y+z)-x}=\frac{(x+y)+(x+z)}{y+z}\geqslant\frac{2\sqrt{(x+y)(x+z)}}{y+z}$.

同理，$\frac{1+\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}-1}\geqslant\frac{2\sqrt{(x+y)(y+z)}}{z+x}$，$\frac{1+\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}-1}\geqslant\frac{2\sqrt{(y+z)(z+x)}}{x+y}$，

所以　$\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1}\cdot\frac{1+\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}-1}\cdot\frac{1+\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}-1}$

$\geqslant\frac{2\sqrt{(x+y)(z+x)}\cdot 2\sqrt{(x+y)(y+z)}\cdot 2\sqrt{(y+z)(z+x)}}{(y+z)\cdot(z+x)(x+y)}=8$.

这样我们就证明了原不等式成立.



**例 5** 如图 1-16，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，对角线 $AC_1$ 与底面及相邻两侧面所成的角分别为 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$，且 $AA_1=a$，$AB=b$，$AD=c$。

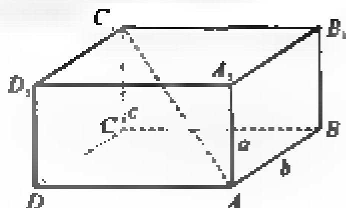



图 1-16

(1) $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 均为锐角

(2) 由于 $\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，$\sin\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，

$\sin\gamma=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，

则 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$。

(3) 由于 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{\sqrt{c^2+a^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，

并且 $\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\dfrac{b+c}{\sqrt{2}}+\dfrac{c+a}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(a+b+c)$，

故 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\geqslant\sqrt{2}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$。

这样可构造问题：

已知 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 为锐角，$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$，求证：

$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\geqslant\sqrt{2}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$

**注** 从证明的过程中我们可以给出一个脱去长方体的证明方式。

$\cos\gamma=\sqrt{1-\sin^2\gamma}=\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}\geqslant\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sqrt{2}}$，

同理，$\cos\beta\geqslant\dfrac{\sin\gamma+\sin\alpha}{\sqrt{2}}$，$\cos\alpha\geqslant\dfrac{\sin\beta+\sin\gamma}{\sqrt{2}}$。

三式相加可得，$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\geqslant\sqrt{2}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$。

(4) 从(3)的注中可知，可以将上述问题作进一步的推广，设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 均为锐角且 $\sin^2\alpha_1+\sin^2\alpha_2+\sin^2\alpha_3+\cdots+\sin^2\alpha_n=1$，求证：$\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3+\cdots+\cos\alpha_n\geqslant\sqrt{n-1}(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n)$。

事实上，$\cos\alpha_i=\sqrt{\sum\limits_{j\neq i}\sin^2\alpha_j}\geqslant\dfrac{\sum\limits_{j\neq i}\sin\alpha_j}{\sqrt{n-1}}$ (Cauchy 不等式)，

故 $\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\alpha_i\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sum\limits_{j\neq i}\sin\alpha_j}{\sqrt{n-1}}=\sum\limits_{i=1}^{n}(n-1)\cdot\dfrac{\sin\alpha_i}{\sqrt{n-1}}=\sqrt{n-1}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\alpha_i$。

(5) 由于 $\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\sqrt{2bc}$，$\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2ca}$，$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\sqrt{2ab}$，

故 $\sqrt{b^2+c^2}\cdot\sqrt{c^2+a^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\geqslant2\sqrt{2}abc$，

即 $\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}\cdot\frac{\sqrt{c^2+a^2}}{b}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}\geqslant 2\sqrt{2}$.

而 $\cot\alpha=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}$，$\cot\beta=\frac{\sqrt{c^2+a^2}}{b}$，$\cot\gamma=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$。

这样可构造问题

已知，$\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 为锐角，且 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$，求证：$\cot\alpha\cdot\cot\beta\cdot\cot\gamma\geqslant 2\sqrt{2}$.

(6) 由(5) 及均值不等式可得问题：

已知 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 为锐角，且 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$，求证：$\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma\geqslant 3\sqrt{2}$.

事实上，$\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma\geqslant 3\sqrt[3]{\cot\alpha\cdot\cot\beta\cdot\cot\gamma}=3\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$.

(7) 对于(5)，我们也可给出一个隐去长方体的证明方式，当然原形还是构造长方体.

证明　由 $\cos\gamma=\sqrt{1-\sin^2\gamma}=\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}\geqslant\sqrt{2\sin\alpha\sin\beta}$.

同理，$\cos\beta\geqslant\sqrt{2\sin\gamma\sin\alpha}$，$\cos\alpha\geqslant\sqrt{2\sin\beta\sin\gamma}$.

故　$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\geqslant\sqrt{8}\cdot\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

即　$\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma\geqslant 2\sqrt{2}$.

将之推广为 $n$ 之情形，则有：

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为锐角，$\sin^2\alpha_1+\sin^2\alpha_2+\cdots+\sin^2\alpha_n=1$，求证：

$\cot\alpha_1\cdot\cot\alpha_2\cdot\cdots\cdot\cot\alpha_n\geqslant(n-1)^{\frac{n}{2}}$.

事实上，$\cos^2\alpha_i=1-\sin^2\alpha_i=\sin^2\alpha_1+\sin^2\alpha_2+\cdots+\sin^2\alpha_{i-1}+\sin^2\alpha_{i+1}+\cdots+\sin^2\alpha_n$

$\geqslant(n-1)\sqrt[(n-1)]{\sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2\cdots\sin^2\alpha_{i-1}\sin^2\alpha_{i+1}\cdots\sin^2\alpha_n}$，

$i=1,2,3,\cdots,n$.

故 $\prod\limits_{i=1}^{n}\cos\alpha_i\geqslant(n-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\prod\limits_{i=1}^{n}(\prod\limits_{j\neq i}\sin\alpha_j)^{\frac{1}{n-1}}=(n-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\prod\limits_{i=1}^{n}\sin\alpha_i$，

即　$\prod\limits_{i=1}^{n}\cot\alpha_i\geqslant(n-1)^{\frac{n}{2}}$.

当然，进一步利用均值不等式，即有如下问题：

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为锐角，$\sin^2\alpha_1+\sin^2\alpha_2+\cdots+\sin^2\alpha_n=1$，求证：$\cot\alpha_1+\cot\alpha_2+\cdots+\cot\alpha_n\geqslant n\cdot\sqrt{n-1}$.

(8) 结合常见不等式

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}(a,b,c>0)$.

且 $\tan^2\alpha=\frac{a^2}{b^2+c^2}$，$\tan^2\beta=\frac{b^2}{c^2+a^2}$，$\tan^2\gamma=\frac{c^2}{a^2+b^2}$，



这样也可以构造问题，

已知 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 为锐角，且 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$，求证：$\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma\geqslant\frac{3}{2}$，也可以求证：$\sec^2\alpha+\sec^2\beta+\sec^2\gamma\geqslant\frac{9}{2}$。

(9) 下面我们利用均值不等式 $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$，来构造一个稍稍复杂的问题。

在前提条件 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为锐角，$\sin^2\alpha_1+\sin^2\alpha_2+\cdots+\sin^2\alpha_n=1$，

$$\tan\alpha_i=\frac{\sin\alpha_i}{\cos\alpha_i}=\frac{\sin\alpha_i}{\sqrt{1-\sin^2\alpha_i}}=\frac{\sin\alpha_i}{\sqrt{\sum\limits_{j\neq i}\sin^2\alpha_j}}\leqslant\frac{\sin\alpha_i\cdot\left(\sum\limits_{j\neq i}\frac{1}{\sin\alpha_j}\right)}{(n-1)\cdot\sqrt{n-1}}$$

$$=\frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}}\cdot\sum_{j\neq i}\frac{\sin\alpha_i}{\sin\alpha_j},$$

故 $$\sum_{i=1}^{n}\tan\alpha_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}}\sum_{j\neq i}\frac{\sin\alpha_i}{\sin\alpha_j}=\frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}}\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}}\frac{\sin\alpha_i}{\sin\alpha_j}$$

另一方面，$$\cot\alpha_i=\frac{\cos\alpha_i}{\sin\alpha_i}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha_i}}{\sin\alpha_i}=\frac{\sqrt{\sum\limits_{j\neq i}\sin^2\alpha_j}}{\sin\alpha_i}\geqslant\frac{\sum\limits_{j\neq i}\sin\alpha_j}{\sqrt{n-1}\cdot\sin\alpha_i},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\cot\alpha_i\geqslant\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sum\limits_{j\neq i}\sin\alpha_j}{\sin\alpha_i}=\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}}\frac{\sin\alpha_j}{\sin\alpha_i},$$

故 $$\sum_{i=1}^{n}\cot\alpha_i\geqslant\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}}\frac{\sin\alpha_i}{\sin\alpha_j}=(n-1)\cdot\frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}}\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}}\frac{\sin\alpha_i}{\sin\alpha_j}$$

$$\geqslant(n-1)\cdot\sum_{i=1}^{n}\tan\alpha_i.$$

即 已知 $\alpha_i$，$i=1,2,\cdots,n$ 为锐角，且 $\sin^2\alpha_1+\sin^2\alpha_2+\cdots+\sin^2\alpha_n=1$，求证 $\cot\alpha_1+\cot\alpha_2+\cdots+\cot\alpha_n\geqslant(n-1)(\tan\alpha_1+\tan\alpha_2+\cdots+\tan\alpha_n)$。

**例 6** Schur 不等式是一个强有力的不等式，内涵丰富、变化多样，如果将某些元素三角化，则也可构造出精彩的问题。

**Schur 不等式** 对于任意正实数 $r$ 及实数 $x$、$y$、$z$，均有

$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-z)(y-x)+z^r(z-x)(z-y)\geqslant0$。

特别对于 $r=1$ 时，有 $x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y)\geqslant 0$

可变形为 $x^3+y^3+z^3+3xyz\geqslant x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2$，

也可变形为 $x^3+y^3+z^3+6xyz\geqslant (x+y+z)(xy+yz+zx)$.

(1) 在 $\triangle ABC$ 中，我们有 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$，这样可以构造不等式

$\tan^3\frac{A}{2}+\tan^3\frac{B}{2}+\tan^3\frac{C}{2}+6\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\geqslant\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}$；

(2) 当然我们也有 $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$，可构造不等式

$\cot^3A+\cot^3B+\cot^3C+6\cot A\cot B\cot C\geqslant\cot A+\cot B+\cot C$；

(3) 取 $r=\frac{1}{2}$，则 $x(x^2-y^2)(x^2-z^2)+y(y^2-z^2)(y^2-x^2)+z(z^2-x^2)(z^2-y^2)\geqslant 0$.

又取 $x=\sin\alpha, y=\sin\beta, z=\sin\gamma$，则

$x(x^2-y^2)(x^2-z^2)=\sin\alpha(\sin^2\alpha-\sin^2\beta)(\sin^2\alpha-\sin^2\gamma)$

$=\frac{1}{4}\sin\alpha(\cos2\beta-\cos2\alpha)(\cos2\gamma-\cos2\alpha)$

$=\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\alpha+\gamma)$.

同理，$y(y^2-z^2)(y^2-x^2)=\sin\beta\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha)$；

$z(z^2-x^2)(z^2-y^2)=\sin\gamma\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma+\alpha)\sin(\gamma-\beta)\sin(\gamma+\beta)$.

故 $\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)+\sin\beta\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta+\alpha)+\sin\gamma\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)\sin(\gamma+\alpha)\sin(\gamma+\beta)\geqslant 0$.

令 $\alpha、\beta、\gamma\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta+\gamma)\cdot\sin(\gamma+\alpha)>0$.

可得问题：对于 $\alpha、\beta、\gamma\in(0,\frac{\pi}{2})$，求证：

$$\frac{\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)}+\frac{\sin\beta\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\gamma+\alpha)}+\frac{\sin\gamma\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\geqslant 0$$

最后以两个竞赛源题的变换构造来结束这一部分.

**例7** 已知 $x、y、z\in\mathbf{R}^+$，$x^2+y^2+z^2=1$，求证：$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$，这是一个常见的不等式，证明也比较简单.

**证明** $x(1-x^2)=\sqrt{x^2(1-x^2)^2}=\sqrt{\frac{2x^2\cdot(1-x^2)\cdot(1-x^2)}{2}}$



$\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{2x^2+(1-x^2)+(1-x^2)}{3}\right]^3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

同理，$y(1-y^2)\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9}$，$z(1-z^2)\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9}$，这样，$\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{y^2}{1-y^2}+\frac{z^2}{1-z^2}=\frac{x^3}{x(1-x^2)}+\frac{y^3}{y(1-y^2)}+\frac{z^3}{z(1-z^2)}\geqslant\frac{x^3+y^3+z^3}{\frac{2\sqrt{3}}{9}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

若令 $x=\sin\alpha$，$y=\sin\beta$，$z=\sin\gamma$，$\alpha,\beta,\gamma\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$\frac{x^2}{1-x^2}=\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\tan^2\alpha$，$\frac{y^2}{1-y^2}=\tan^2\beta$，$\frac{z^2}{1-z^2}=\tan^2\gamma$.

问题即可转化为：已知 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 为锐角，$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$，求证：$\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

这是 2005 年第二届东南地区数学奥林匹克竞赛的第 8 题.

**例 8** 设 $f(a,b,c)=\frac{1}{\sqrt{1+2a}}+\frac{1}{\sqrt{1+2b}}+\frac{1}{\sqrt{1+2c}}$，其中 $a,b,c>0$ 且 $abc=1$，求常数 $\lambda$ 的最小值，使得 $f(a,b,c)<\lambda$ 恒成立.

**解** 这并不是一个很简单的问题，我们猜测 $\lambda$ 的最小值为 2，即证 $\frac{1}{\sqrt{1+2a}}+\frac{1}{\sqrt{1+2b}}+\frac{1}{\sqrt{1+2c}}<2$.

由于当 $x\leqslant1$ 时，$\sqrt{1-x}<1-\frac{x}{2}$，则 $\frac{1}{\sqrt{1+2a}}=\sqrt{1-\frac{2a}{1+2a}}<1-\frac{a}{1+2a}$，

同理 $\frac{1}{\sqrt{1+2b}}<1-\frac{b}{1+2b}$.

所以 $\frac{1}{\sqrt{1+2a}}+\frac{1}{\sqrt{1+2b}}<2-\left(\frac{a}{1+2a}+\frac{b}{1+2b}\right)$，又因为 $abc=1$，所以 $c=\frac{1}{ab}$.

$\frac{1}{\sqrt{1+2c}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{ab}}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2+ab}}$.

这样，$2-\left(\frac{a}{1+2a}+\frac{b}{1+2b}\right)+\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2+ab}}<2\Leftrightarrow\frac{a}{1+2a}+\frac{b}{1+2b}>\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2+ab}}$.

由于 $\frac{a}{1+2a}+\frac{b}{1+2b}\geqslant\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{(1+2a)(1+2b)}}$，而 $\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{(1+2a)(1+2b)}}>$





$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2+ab}} \Leftrightarrow 4(2+ab) \geqslant (1+2a)(1+2b) \Leftrightarrow a+b \leqslant \frac{7}{2}$.

而当 $a+b>\frac{7}{2}$ 时，(我们可以规定 $a\leqslant b\leqslant c$)，则 $b>\frac{7}{4}, c>\frac{7}{4}$，此时

$$\frac{1}{\sqrt{1+2b}}+\frac{1}{\sqrt{1+2c}}<\frac{2}{\sqrt{1+\frac{7}{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}<1$$

当然有 $\frac{1}{\sqrt{1+2a}}+\frac{1}{\sqrt{1+2b}}+\frac{1}{\sqrt{1+2c}}<1+1=2$.

另取 $a=b=\frac{1}{n}, c=n^2$，则

$$\lim_{n\to\infty} f(a,b,c)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{1+2n^2}}\right)=2.$$

这样就说明了 $\lambda=2$ 为最小取值.

将此问题推广，设 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0, x_1\cdot x_2\cdots x_n=1(n\geqslant 3)$，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{\sqrt{1+2x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+2x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+2x_n}}$，则满足 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)<\lambda$ 的最小值为 $n-1$.

事实上，不妨设 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$，则 $x_1x_2x_3\geqslant 1$，这样

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+2x_2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2x_3}}<2.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x_i}}<1, i=4,5,\cdots,n.$$

故 $$\frac{1}{\sqrt{1+2x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+2x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+2x_n}}<n-1$$

我们将问题考虑得再仔细些，当 $n=1,2$ 时它将如何？这时问题比较简单，当 $n=1$ 时，由于 $x_1=1$，则 $\frac{1}{\sqrt{1+2x_1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

当 $n=2$ 时，$x_1,x_2>0, x_1x_2=1$，$\frac{1}{\sqrt{1+2x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+2x_2}}\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

令 $\cos\theta_i=\frac{1}{\sqrt{1+2x_i}}$，则 $2x_i=\frac{1}{\cos^2\theta_i}-1=\tan^2\theta_i$.

问题就转化为：给定正整数 $n$，求最小正数 $\lambda$，使得对任意 $\theta_i\in(0,\frac{\pi}{2}), i=1,2,\cdots,n$，只要 $\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2\cdots\tan\theta_n=2^{\frac{n}{2}}$，总有 $\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n$ 不超过 $\lambda$



这是 2003 年中国数学奥林匹克竞赛(CMO) 的第 6 题.

### §1.4.2 变换命题的题设与结论

在对原命题的改造中,对题设与结论的加强、弱化、特殊化等手段是常用方法,特别是当求解某问题有新的方法出现时,常常可以由此产生许多新命题.当然考察命题的四种相关命题:原命题、逆命题、否命题、逆否命题及命题的充分条件与必要条件都是产生新命题的常用方法.

**例 1** **原命题** 求证:$\frac{1}{\sin24^\circ}+\frac{1}{\sin48^\circ}+\frac{1}{\sin96^\circ}=\frac{1}{\sin12^\circ}$.

**证明** $\frac{1}{\sin2x}=\cot x-\cot2x$(见第一章第一节例 3 后的评注).

令 $x=12^\circ,24^\circ,48^\circ$,得

$\frac{1}{\sin24^\circ}+\frac{1}{\sin48^\circ}+\frac{1}{\sin96^\circ}=(\cot12^\circ-\cot24^\circ)+(\cot24^\circ-\cot48^\circ)+(\cot48^\circ-\cot96^\circ)=$

$\cot12^\circ-\cot96^\circ=\frac{\cos12^\circ}{\sin12^\circ}+\frac{\sin6^\circ}{\cos6^\circ}=\frac{\cos12^\circ\cos6^\circ+\sin12^\circ\sin6^\circ}{\sin12^\circ\cos6^\circ}=\frac{\cos6^\circ}{\sin12^\circ\cos6^\circ}=\frac{1}{\sin12^\circ}$.

我们反过来看一下,对于锐角 $x$ 满足

$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{\sin2x}+\frac{1}{\sin4x}+\frac{1}{\sin8x}$ 是否仅有一个解 $x=12^\circ$ 呢?

**新命题** 设 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 且 $\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{\sin2x}+\frac{1}{\sin4x}+\frac{1}{\sin8x}$,求 $x$ 的值.

**解** 由于 $\frac{1}{\sin2x}=\cot x-\cot2x$,则

$$\frac{1}{\sin x}=(\cot x-\cot2x)+(\cot2x-\cot4x)+(\cot4x-\cot8x)=\cot x-\cot8x,$$

故 $\frac{1}{\sin x}-\cot x=-\cot8x\Leftrightarrow\frac{1-\cos x}{\sin x}=-\cot8x\Leftrightarrow\tan\frac{x}{2}=-\cot8x$

$\Leftrightarrow\cot(90^\circ+\frac{x}{2})=\cot8x\Leftrightarrow8x=90^\circ+\frac{x}{2}+180^\circ\cdot k,k\in\mathbf{Z}$

$\Leftrightarrow x=12^\circ+24^\circ\cdot k,k\in\mathbf{Z}$.

又因为 $x\in(0,90^\circ)$,所以 $x=12^\circ$ 或 $36^\circ$ 或 $60^\circ$ 或 $84^\circ$.

这样,我们就完整地得到一个新命题,并且比原命题要深刻得多.

**例 2** 已知 $x\in\mathbf{R}$,求证:$\sin^6x+\cos^6x+\sin^2x=2\sin^4x+\cos^4x$.这是同角三角函数恒等变形中常见的一个问题.下面我们变换这个命题的题设与结论来构造一个新命题.

令 $f(x)=\sin^6x+\cos^6x-2\sin^4x+\sin^2x-\cos^4x$,则 $f(x)\equiv0,x\in\mathbf{R}$.

我们考察 $f(x)$ 的积分形式,为了更有利于积分,两边同乘以 $\sin x\cos x$,则





$\sin x\cdot\cos x\cdot f(x)=0$。当然 $\int\sin x\cdot\cos x\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int(\sin^7x\cos x+\cos^7x\sin x-2\sin^5x\cos x-\cos^5x\sin x+\sin^3x\cos x)\mathrm{d}x=\int\sin^7x\mathrm{d}\sin x+\int(-\cos^7x)\mathrm{d}\cos x-2\int\sin^5x\mathrm{d}\sin x+\int\cos^5x\mathrm{d}\cos x+\int\sin^3x\mathrm{d}\sin x=\frac{\sin^8x}{8}-\frac{\cos^8x}{8}-\frac{\sin^6x}{3}+\frac{\cos^6x}{6}+\frac{\sin^4x}{4}+C$，$C$ 为任意常数。

令 $g(x)=\frac{\sin^8x}{8}-\frac{\cos^8x}{8}-\frac{\sin^6x}{3}+\frac{\cos^6x}{6}+\frac{\sin^4x}{4}$，

而 $g(0)=-\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$。

这样我们就得到了一个新问题：

已知 $x\in\mathbf{R}$，求证：$\frac{\sin^8x}{8}-\frac{\cos^8x}{8}-\frac{\sin^6x}{3}+\frac{\cos^6x}{6}+\frac{\sin^4x}{4}=\frac{1}{24}$。

**例 3** 我们在第一章第一节例 3 中的(3)与(9)建立如下恒等式：

$$\sin2x+\sin4x+\sin6x+\cdots+\sin2nx=\frac{\sin nx\cdot\sin(n+1)x}{\sin x},$$

$$\cos2x+\cos4x+\cos6x+\cdots+\cos2nx=\frac{\sin nx\cdot\cos(n+1)x}{\sin x}.$$

将上面两式平方后相加得：

$$\frac{\sin^2nx}{\sin^2x}=\frac{\sin^2nx\cdot\sin^2(n+1)x}{\sin^2x}+\frac{\sin^2nx\cdot\cos^2(n+1)x}{\sin^2x}=(\sin2x+\sin4x+\sin6x+\cdots+\sin2nx)^2+(\cos2x+\cos4x+\cos6x+\cdots+\cos2nx)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sin^22kx+2\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\sin2kx\cdot\sin2lx+\sum_{k=1}^{n}\cos^22kx+2\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\cos2kx\cdot\cos2lx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sin^22kx+\cos^22kx)+2\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}(\sin2kx\sin2lx+\cos2kx\cos2lx)$$

$$=n+2\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\cos2(l-k)x.$$

这样我们得到恒等式 $\frac{\sin^2nx}{\sin^2x}=n+2\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\cos2(l-k)x$。

反向问之，试探求 $a_0,a_{k,l}(1\leqslant k<l\leqslant n)$ 使对于 $x\in\mathbf{R}(\sin x\neq0)$ 均有

$$\frac{\sin^2nx}{\sin^2x}=a_0+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}a_{k,l}\cdot\cos2(k-l)x.$$

**例 4** 在 $\triangle ABC$ 中，我们有 $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ 这一个三角恒等式，反之又会如何呢？



即：若 $A$、$B$、$C \in (0,\pi)$，且 $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$，则 $A$、$B$、$C$ 可否为某三角形的三内角？

**探索** $\sin A+\sin B+\sin C-4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C-2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{A-B}{2}\left(\sin\frac{A+B}{2}-\cos\frac{C}{2}\right)+2\cos\frac{C}{2}\left(\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{A-B}{2}\left[\sin\frac{A+B}{2}-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\right]+2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)-\cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$=4\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B-C+\pi}{4}\sin\frac{A+B+C-\pi}{4}$$

$$+4\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A+B-C+\pi}{4}\sin\frac{A+B+C-\pi}{4}$$

$$=4\sin\frac{A+B+C-\pi}{4}\cdot\left(\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B-C+\pi}{4}+\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A+B-C+\pi}{4}\right)$$

$$=0,$$

只需证明 $\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B-C+\pi}{4}+\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A+B-C+\pi}{4}\neq 0$ 即可.

当然，当 $A$、$B$、$C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，上式显然不为 0. 事实上：若 $A$、$B$、$C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则

$-\frac{\pi}{4}<\frac{A-B}{2}<\frac{\pi}{4}$，$0<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{8}<\frac{A+B-C+\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$，这样，$\cos\frac{A-B}{2}>0$，$\cos\frac{C}{2}>0$，$\cos\frac{A+B-C+\pi}{4}>0$，$\sin\frac{A+B-C+\pi}{4}>0$

所以 $\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B-C+\pi}{4}+\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A+B-C+\pi}{4}>0$

那么，当 $A$、$B$、$C\in(0,\pi)$ 时，哪个地方会出问题呢？

$A$、$B$、$C\in(0,\pi)$ 时，$-\frac{\pi}{2}<\frac{A-B}{2}<\frac{\pi}{2}$，$0<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{4}<\frac{A+B+C-\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$，

但 $0<\frac{A+B-C+\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi$，导致 $\cos\frac{A+B-C+\pi}{4}<0$. 怎么办？

我们考察，若 $\frac{A+B-C+\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$，又如何？$\frac{A+B-C+\pi}{4}<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow A+B<\pi+C$

那么，只需取 $C=\max\{A,B,C\}$，即可满足上式，而这也是可以满足的. 事实上，命题关于 $A$、$B$、$C$ 完全对称，故可不妨设 $A\leqslant B\leqslant C$.





从上述的探索过程可知，我们可以构造两个不同层次的命题。

**命题1** 已知 $A、B、C\in(0,\frac{\pi}{2})$，满足 $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$，求证：$A、B、C$ 是某一角形的三内角。

**命题2** 已知 $A,B,C\in(0,\pi)$，满足 $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$，求证 $A,B,C$ 是某三角形的三内角

**例5** 在锐角$\triangle ABC$中，由于 $A+B>\frac{\pi}{2}$，故 $0<\frac{\pi}{2}-B<A<\frac{\pi}{2}$

这样 $\sin A>\sin(\frac{\pi}{2}-B)=\cos B$.

同理，$\sin B>\cos C$，$\sin C>\cos A$.

累加可得，$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$.

这是我们常见的一个命题，证明方式大多采用上述构造方式。如果我们采用作差法证明，又将如何呢？

$\sin A+\sin B+\sin C-\cos A-\cos B-\cos C$

$=(\sin A+\sin B)-(\cos A+\cos B)+(\sin C-\cos C)$

$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}-2\cos^2\frac{C}{2}+1$

$=1+2\cos\frac{A-B}{2}\left(\sin\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)+2\cos\frac{C}{2}\left(\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}\right)$

$=1+2\cos\frac{A-B}{2}\left(\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)+2\cos\frac{C}{2}\left(\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}\right)$

$=1+2\left(\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)$

$=1+2\sqrt{2}\sin\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot(-2)\sin\frac{A+C-B}{4}\sin\frac{B+C-A}{4}$

$=1+4\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)\sin\frac{A+C-B}{2}\sin\frac{B+C-A}{2}$.

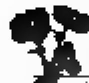
由于 $A、B、C\in(0,\frac{\pi}{2})$，故 $0<\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}<\frac{\pi}{4}$，$0<\frac{A+C-B}{4}<\frac{\pi}{4}$，$0<\frac{B+C-A}{4}<\frac{\pi}{4}$.

这样 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)>0$，$\sin\frac{A+C-B}{4}>0$，$\sin\frac{B+C-A}{4}>0$.

故 $\sin A+\sin B+\sin C-\cos A-\cos B-\cos C>1>0$.

从证明的过程中，我们得到了一个新问题：

在锐角$\triangle ABC$中，求证：$\sin A+\sin B+\sin C>1+\cos A+\cos B+\cos C$.



这比原来的问题强多了.

进一步,由于 $\cos A+\cos B+\cos C\in(1,\frac{3}{2}]$,我们可得:

在锐角△ABC中,求证:$\sin A+\sin B+\sin C>2$.

这看上去就比较简洁了,并且当 $A=\frac{\pi}{2}$,$B=\frac{\pi}{2}$ 时,$\sin A+\sin B+\sin C=2$,即常数2是最佳常数.

怎样证明呢?当然可以采用构造的方法,也可用其他方式.

**方法1** 利用函数 $y=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上是单调递减函数,详见§1.1中例4.

**方法2** (调整法)令 $f(A,B,C)=\sin A+\sin B+\sin C$,下面证明

$f(A,B,C)<f(\frac{\pi}{2},A+B-\frac{\pi}{2},C)<f(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0)=2$.

事实上,$f(A,B,C)<f(\frac{\pi}{2},A+B-\frac{\pi}{2},C)\Leftrightarrow\sin A+\sin B<\sin\frac{\pi}{2}+\sin(A+B-\frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}<2\sin\frac{A+B}{2}\cos(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow 2\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right]\cos\frac{C}{2}<0\Leftrightarrow\cos\frac{A-B}{2}-\cos\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{2}\right)<0$

$\Leftrightarrow -2\sin(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4})\cdot\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2})<0\Leftrightarrow\sin(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4})\sin(\frac{B}{2}-\frac{\pi}{4})>0$,

而 $-\frac{\pi}{4}<\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}<0$,$-\frac{\pi}{4}<\frac{B}{2}-\frac{\pi}{4}<0$,

故 $\sin(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4})<0$,$\sin(\frac{B}{2}-\frac{\pi}{4})<0$,

这样 $\sin(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4})\cdot\sin(\frac{B}{2}-\frac{\pi}{4})>0$,$f(A,B,C)<f(\frac{\pi}{2},A+B-\frac{\pi}{2},C)$,

而 $A+B-\frac{\pi}{2}$,$C\in(0,\frac{\pi}{2})$,故上式可再作一次调整,即有:

$f(\frac{\pi}{2},A+B-\frac{\pi}{2},C)<f(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0)$,

故 $f(A,B,C)<f(\frac{\pi}{2},A+B-\frac{\pi}{2},C)<f(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0)=2$.

**方法3** 由于三角恒等式 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2+2\cos A\cos B\cos C$,

因为 $\sin A,\sin B,\sin C\in(0,1)$,所以 $\sin A+\sin B+\sin C>\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2+2\cos A\cos B\cos C>2$.

问题又出来了,在锐角△ABC中,$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$ 与 $1+\cos A+\cos B+\cos C$ 哪





个大呢？

当$(A,B,C)\to(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0)$时，$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\to2$，$1+\cos A+\cos B+\cos C\to2$，

当$(A,B,C)\to(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$时，$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=\frac{9}{4}$，$1+\cos A+\cos B+\cos C=\frac{5}{2}$

我们猜测，在锐角$\triangle ABC$中，$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C<1+\cos A+\cos B+\cos C$。

事实上，$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C<1+\cos A+\cos B+\cos C$

$\Leftrightarrow 1+\cos A+\cos B+\cos C+\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C>3$

$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C+\frac{1+\cos2A}{2}+\frac{1+\cos2B}{2}+\frac{1+\cos2C}{2}>2$

$\Leftrightarrow 2(\cos A+\cos B+\cos C)+\cos2A+\cos2B+\cos2C>1$

$\Leftrightarrow(\cos A+\cos B+\cos C-1)+(\cos A+\cos B+\cos C+\cos2A+\cos2B+\cos2C)>0$，

由于　$\cos A+\frac{1}{2}(\cos2B+\cos2C)=\cos A+\cos(B+C)\cos(B-C)$

$=\cos A[1-\cos(B-C)]>0$

同理，$\cos B+\frac{1}{2}(\cos2C+\cos2A)>0$，$\cos C+\frac{1}{2}(\cos2A+\cos2B)>0$

故　$\cos A+\cos B+\cos C+\cos2A+\cos2B+\cos2C>0$，

而　$\cos A+\cos B+\cos C>1$，

这样　$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C<1+\cos A+\cos B+\cos C$。

通过上面探索、证明，我们可以得到一个较强的不等式链：

在锐角$\triangle ABC$中，求证　$\sin A+\sin B+\sin C>1+\cos A+\cos B+\cos C>\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C>2$。

注1　在这个例子当中我们需要注意，不要忽视或者轻视一些看似笨拙的做法，这往往是最接近本质的想法，大有"大拙即巧，大愚即智"的味道。

注2　对于不等式$\sin A+\sin B+\sin C>2$，我们再给出一个几何做法。

设$\triangle ABC$的三边为$a$、$b$、$c$，外接圆半径为$R$，则由正弦定理求证的不等式可转化为$a+b+c>4R$

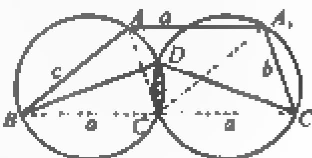


图1-17

作出$\triangle ABC$及其外接圆，不妨设$a=BC$为最大边，平移$\triangle ABC$及其外接圆为$\triangle A_1B_1C_1$及其外接圆，使$B_1$重合于$C$，$C_1$在$BC$的延长线上，如图1-17所示。记两等圆的另一交点为$D$，则$\angle BDC=\angle CDC_1$，且$BC=CC_1$，故$DB=DC_1$，$DC\perp BC_1$，$DB$和$DC_1$分别为两圆的直径。再由$\triangle ABC$为锐角三角形可知$D$在凸四边形$ABC_1A_1$内，于是$AB+AA_1+A_1C_1>DB+DC_1$，即$a+b+c>4R$。



# 第二章 三角函数问题的求解

## §2.1 三角恒等关系(一)

这一节我们主要讨论三角恒等式的变形方法与技巧，包括三角恒等式的证明、条件恒等式的证明、化简、求值问题等。在解决问题的过程中我们时刻要注意"角度变化、结构变化、三角函数名称的变化"，这是一把打开解决问题之门的金钥匙。另外，三角形内三角恒等式，内容丰富，方法、技巧一致，我们将在三角恒等关系(二)中单独介绍。

**例1** 求证：$\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

**分析** 从"角"处有 $2\alpha+\beta$，$\alpha+\beta$，$\alpha$，$\beta$ 四种角，一种比较好的联系方式是 $2\alpha+\beta=(\alpha+\beta)+\alpha$，$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$，形式比较对称；从"结构"看，通分应该是明智的选择；从"名称"看为正、余弦形式，比较基本，证明方式用综合法与分析法均可。

**证明** $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)-\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$

$=\dfrac{\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]-2\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha-\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]}{\sin\alpha}$

$=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha-2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha-\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}{\sin\alpha}$

$=\dfrac{0}{\sin\alpha}=0$.

所以，$\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

**例2** 求证：$\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)}+\dfrac{\sin\gamma}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}=0$.

**分析** 这是一个轮换对称恒等式，我们可以采用"各个击破"的方式试一试.

**证明** $\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}=\dfrac{\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\gamma-\beta)}$

$=\dfrac{\cos(\alpha+\beta-\gamma)-\cos(\alpha-\beta+\gamma)}{2\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\gamma-\beta)}$.

同理，$\dfrac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)}=\dfrac{\cos(\beta+\gamma-\alpha)-\cos(\beta-\gamma+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)\sin(\alpha-\gamma)}$,

$\dfrac{\sin\gamma}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}=\dfrac{\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\gamma-\alpha+\beta)}{2\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)\sin(\beta-\alpha)}$,

三式相加，即有$\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)}+\dfrac{\sin\gamma}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}=0$.

**例3** 求值 $\cot10°-4\cos10°$.

**分析** 化为特殊角的三角函数求值.

**解法1** $\cot10°-4\cos10°=\dfrac{\cos10°}{\sin10°}-4\cos10°=\dfrac{\cos10°-4\sin10°\cos10°}{\sin10°}$

$=\dfrac{\sin80°-2\sin20°}{\sin10°}=\dfrac{(\sin80°-\sin20°)-\sin20°}{\sin10°}=\dfrac{2\cos50°\cdot\sin30°-\sin20°}{\sin10°}$

$=\dfrac{\sin40°-\sin20°}{\sin10°}=\dfrac{2\cos30°\sin10°}{\sin10°}=\sqrt{3}$.

**解法2** $\cot10°-4\cos10°=\dfrac{\sin80°-2\sin20°}{\sin10°}=\dfrac{2\cdot\dfrac{1}{2}\sin80°-2\sin20°}{\sin10°}$

$=\dfrac{2\sin80°\cdot\cos60°-2\sin20°}{\sin10°}=\dfrac{\sin140°+\sin20°-2\sin20°}{\sin10°}=\dfrac{\sin140°-\sin20°}{\sin10°}$

$=\dfrac{2\cos80°\sin60°}{\sin10°}=\sqrt{3}$

**解法3** $\cot10°-4\cos10°=\dfrac{\sin80°-2\sin20°}{\sin10°}=\dfrac{\sin80°-2\sin(80°-60°)}{\sin10°}$

$=\dfrac{\sin80°-2(\sin80°\cos60°-\cos80°\sin60°)}{\sin10°}=\dfrac{2\cos80°\sin60°}{\sin10°}=\sqrt{3}$.

**解法4** 构造直角三角形求解.

如图2-1，作直角$\triangle DBC$，其中$\angle C$为直角，$CB=\dfrac{1}{2}AB=1$，$\angle D=10°$

在$\triangle ABD$中，由正弦定理可知，$\dfrac{AD}{\sin20°}=\dfrac{2}{\sin10°}$，则$AD=\dfrac{2\sin20°}{\sin10°}=4\cos10°$.

在$\mathrm{Rt}\triangle BCD$中，$CD=\cot10°$，



由于 $AC=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，且 $AC=CD-AD$，

故 $\cot 10°-4\cos 10°=\sqrt{3}$.

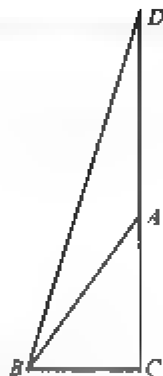



图 2-1

**例4** 求值：(1) $\sin 18°$；(2) $\sin 18°\sin 54°$；(3) $\sin 36°\sin 72°$

**解** (1)令 $t=\sin 18°$，则 $0<t<1$.

由于 $\sin 54°=\cos 36°$，即 $3\sin 18°-4\sin^3 18°=1-2\sin^2 18°$，

所以 $4t^3-2t^2-3t+1=0$，即 $(t-1)(4t^2+2t-1)=0$.

又因为 $0<t<1$，所以 $t=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

(2) $\sin 18°\sin 54°=\cos 36°\cos 72°=\frac{4\sin 36°\cos 36°\cos 72°}{4\sin 36°}=\frac{\sin 144°}{4\cos 36°}=\frac{1}{4}$

(3)方法1（利用(1)的结论），$\sin 36°\sin 72°=2\sin 18°\cos 18°\cos 18°=2\sin 18°(1-\sin^2 18°)=2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{8}\right)=\frac{\sqrt{5}}{4}$

方法2（利用(2)的结论），令 $x=\sin 36°\sin 72°$，则

$x+\frac{1}{4}=\sin 36°\sin 72°+\cos 36°\cos 72°=\cos 36°$，

$x-\frac{1}{4}=\sin 36°\sin 72°-\cos 36°\cos 72°=-\cos 108°=\cos 72°$.

所以，$x^2-\frac{1}{16}=\cos 36°\cdot\cos 72°=\frac{1}{4}$，即 $x^2=\frac{5}{16}$.

又由于 $x>0$，故 $x=\frac{\sqrt{5}}{4}$，即 $\sin 36°\sin 72°=\frac{\sqrt{5}}{4}$.

**注** 对于此类问题要注意利用诱导公式及积化和差公式产生的式子，如：

(1) $\cos 72°=\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$；

(2) $\sin 18°\sin 54°=\cos 36°\cos 72°=\sin 18°\cos 36°=\sin 54°\cos 72°=\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}$

$=\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}=\sin\frac{3\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}$；

(3) $\sin 36°\sin 72°=\cos 18°\cos 54°=\sin 36°\cdot\cos 18°=\cos 54°\sin 72°=\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}$

$=\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2}{5}\pi=\cos\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{5}=\cos\frac{3\pi}{10}\sin\frac{2}{5}\pi=\frac{\sqrt{5}}{4}$；

(4) $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{1}{2}$，$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}}{2}$；





由(4)可知：

(5)$\cos\frac{3\pi}{5}=-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$；

(6)$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

**例 5** 求值(1)$\sin1^\circ\sin3^\circ\sin5^\circ\cdots\sin87^\circ\sin89^\circ$；

(2)$\sin1^\circ\sin2^\circ\sin3^\circ\cdots\sin88^\circ\sin89^\circ$.

**解** (1)设 $x=\sin1^\circ\sin3^\circ\sin5^\circ\cdots\sin87^\circ\sin89^\circ$,

$y=\sin2^\circ\sin4^\circ\sin6^\circ\cdots\sin88^\circ\sin90^\circ$,

则 $x\cdot y=\sin1^\circ\sin2^\circ\sin3^\circ\cdots\sin87^\circ\sin88^\circ\sin89^\circ\sin90^\circ$

$=(\sin1^\circ\cdot\sin89^\circ)\cdot(\sin2^\circ\cdot\sin88^\circ)\cdots(\sin44^\circ\cdot\sin46^\circ)\cdot\sin45^\circ$

$=(\sin1^\circ\cos1^\circ)\cdot(\sin2^\circ\cos2^\circ)\cdots(\sin44^\circ\cos44^\circ)\cdot\sin45^\circ$

$=\frac{1}{2^{44}}\sin2^\circ\sin4^\circ\sin6^\circ\cdots\sin88^\circ\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2^{45}}\cdot y$

又因为 $y\neq0$,所以 $x=\frac{\sqrt{2}}{2^{45}}$,即 $\sin1^\circ\sin3^\circ\sin5^\circ\cdots\sin89^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2^{45}}$.

(2)不断利用 $\sin3\theta=4\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)$来减少角.

$\sin1^\circ\sin2^\circ\sin3^\circ\cdots\sin89^\circ=(\sin1^\circ\sin59^\circ\sin61^\circ)\cdot(\sin2^\circ\sin58^\circ\sin62^\circ)\cdots(\sin29^\circ\cdot\sin31^\circ\sin89^\circ)\cdot\sin30^\circ\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4^{30}}\sin3^\circ\sin6^\circ\sin9^\circ\cdots\sin87^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4^{30}}(\sin3^\circ\sin57^\circ\sin63^\circ)\cdot(\sin6^\circ\sin54^\circ\sin66^\circ)\cdots(\sin27^\circ\sin33^\circ\sin87^\circ)\cdot\sin30^\circ\cdot\sin60^\circ=\frac{3}{4^{40}}\sin9^\circ\sin18^\circ\sin27^\circ\cdots\sin72^\circ\cdot\sin81^\circ$,

而 $\sin9^\circ\sin18^\circ\sin27^\circ\cdots\sin72^\circ\sin81^\circ=(\sin9^\circ\sin81^\circ)\cdot(\sin18^\circ\sin72^\circ)\cdot(\sin27^\circ\cdot\sin63^\circ)\cdot(\sin36^\circ\sin54^\circ)\cdot\sin45^\circ$

$=(\sin9^\circ\cos9^\circ)\cdot(\sin18^\circ\cos18^\circ)\cdot(\sin27^\circ\cos27^\circ)\cdot(\sin36^\circ\cos36^\circ)\cdot\sin45^\circ$

$=(\frac{1}{4})^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin18^\circ\sin36^\circ\sin54^\circ\sin72^\circ=(\frac{1}{4})^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sin18^\circ\sin54^\circ)\cdot(\sin36^\circ\sin72^\circ)$

$=(\frac{1}{4})^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}}{4}=(\frac{1}{4})^5\cdot2\sqrt{10}$(这是利用了上例的结论).

**故** $\sin1^\circ\sin2^\circ\sin3^\circ\cdots\sin88^\circ\sin89^\circ=(\frac{1}{4})^{45}\cdot6\sqrt{10}=\frac{3\sqrt{10}}{2^{89}}$.

**注** 由(1)、(2)的求解过程中可知：$\sin2^\circ\sin4^\circ\sin6^\circ\cdots\sin88^\circ\sin90^\circ=\frac{3\sqrt{5}}{2^{44}}$.

**例 6** 求值：$\cos^4\frac{\pi}{16}+\cos^4\frac{3\pi}{16}+\cos^4\frac{5\pi}{16}+\cdots+\cos^4\frac{15\pi}{16}$



**解** 设 $x=\cos^4\frac{\pi}{16}+\cos^4\frac{3\pi}{16}+\cos^4\frac{5\pi}{16}+\cos^4\frac{7\pi}{16}$，

$y=\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}$，

**则** $x-y=\left(\cos^2\frac{\pi}{16}-\sin^2\frac{\pi}{16}\right)+\left(\cos^2\frac{3\pi}{16}-\sin^2\frac{3\pi}{16}\right)+\left(\cos^2\frac{5\pi}{16}-\sin^2\frac{5\pi}{16}\right)$

$\quad+\left(\cos^2\frac{7\pi}{6}-\sin^2\frac{7\pi}{16}\right)$

$\quad=\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}=0$；

$x+y=4-2\left(\cos^2\frac{\pi}{16}\sin^2\frac{\pi}{16}+\cos^2\frac{3\pi}{16}\sin^2\frac{3\pi}{16}+\cos^2\frac{5\pi}{16}\sin^2\frac{5\pi}{16}+\cos^2\frac{7\pi}{16}\sin^2\frac{7\pi}{16}\right)$

$\quad=4-\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}\right)$

$\quad=4-\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}\right)=4-\left[\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2}\right]=3.$

**故** $x=y=\frac{3}{2}$。

**注** 上述做法通常称之为配对原理，至于配上怎样的式子，因题而异。

**例7** 求值：$\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}$

**解** 设 $x=\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}$，$y=\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}$，

**则** $x+y=\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{13}}\left[2\sin\frac{\pi}{13}\left(\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cdots+\cos\frac{11\pi}{13}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{13}}\left[\sin\frac{2\pi}{13}+\left(\sin\frac{4\pi}{13}-\sin\frac{2\pi}{13}\right)+\cdots+\left(\sin\frac{12\pi}{13}-\sin\frac{10\pi}{13}\right)\right]$$

$$=\frac{\sin\frac{12\pi}{13}}{2\sin\frac{\pi}{13}}=\frac{1}{2}，$$





$$x\cdot y=\left(\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{13}-\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}-\cos\frac{4\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}-\cos\frac{6\pi}{13}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}\right)$$

$$=-\frac{3}{4}.$$

故 $x$、$y$ 是方程 $t^2-\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}=0$ 的两根，$t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{4}$.

又由于 $x>0$，故 $x=\frac{1+\sqrt{13}}{4}$，

即 $\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=\frac{1+\sqrt{13}}{4}$.

**注1** 此例中配对的式子与上例不同，当然也可采用自配对方式.

$$x^2=\left(\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}\right)^2$$

$$=\cos^2\frac{\pi}{13}+\cos^2\frac{3\pi}{13}+\cos^2\frac{9\pi}{13}+2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{3\pi}{13}+2\cos\frac{3\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+2\cos\frac{9\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi}{13}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{6\pi}{13}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{18\pi}{13}\right)+\cos\frac{4\pi}{13}+\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{12\pi}{13}$$

$$+\cos\frac{6\pi}{13}+\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{11\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}\right)$$

$$-\left(\cos\frac{11\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}\right).$$

又因为 $\cos\frac{11\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=\frac{1}{2}-\left(\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{\pi}{13}\right)$

从而 $x^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-x\right)-\frac{1}{2}$，$x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{4}$.

又因为 $x>0$，所以 $x=\frac{1+\sqrt{13}}{4}$.

**注2** 关于构造方程来求值，我们在§1.3.2中有较多的论述，但在实际运用中，有时并不简单.

**例8** 求 $\cos^5\frac{\pi}{9}+\cos^5\frac{5\pi}{9}+\cos^5\frac{7\pi}{9}$ 的值.

**分析** 本题次数太高，处理有难度，从次数低的做起.



**解** 设 $x_1=\cos\frac{\pi}{9},x_2=\cos\frac{5\pi}{9},x_3=\cos\frac{7\pi}{9}$，则

$x_1+x_2+x_3=\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=2\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{5\pi}{9}=\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}=0$，

$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}$

$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{3}\right)$

$=\frac{1}{2}\left[-\frac{3}{2}+\cos\frac{4\pi}{9}+\left(\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}\right)\right]$

$=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+2\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}\right)=-\frac{3}{4}$，

$x_1\cdot x_2\cdot x_3=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}$

$=\frac{8\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{8\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin\frac{8\pi}{9}}{8\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{1}{8}$，

故 $x_1,x_2,x_3$ 是方程 $x^3-\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}=0$ 的根．

所以 $x^4-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}x^2=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{8}x^2=\frac{1}{8}x^2+\frac{9}{16}x+\frac{3}{32}$，

从而，$\cos^4\frac{\pi}{9}+\cos^4\frac{5\pi}{9}+\cos^4\frac{7\pi}{9}=\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\frac{9}{16}(x_1+x_2+x_3)+\frac{3}{32}\times3$

$=\frac{1}{8}[(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)]+\frac{9}{16}(x_1+x_2+x_3)+\frac{9}{32}$

$=\frac{1}{8}\times(-2)\times\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{9}{32}$

$=\frac{15}{32}$

下面我们来讨论一些条件恒等式的证明，变形过程仍注重"角"的变化、"名"的变化及"结构"的变化．

**例 9** 已知 $\sin\alpha=A\sin(\alpha+\beta)$，$|A|>1$，求证：$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos\beta-A}$．

**分析** 条件中的"角"：$\alpha$、$\alpha+\beta$；结论中的"角"：$\beta$、$\alpha+\beta$；作联系：$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$，得到统





"名称"与结构，条件为"整式"情形，结论为"分式"形，这与"名称"转化为正切互相匹配.

**证明** $A\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha=\sin[(\alpha+\beta)-\beta]=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta$,

即 $(\cos\beta-A)\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\beta$.

由于 $|A|>1$，故 $\cos\beta-A<0$，

所以，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta-A}$.

**注** "角度"的变化规律对于快捷、准确地解决这类问题至关重要.

**例 10** 已知 $\dfrac{\cos^3\alpha}{\cos\beta}+\dfrac{\sin^3\alpha}{\sin\beta}=1$，求证 $\left(\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)\left(\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}+1\right)=0$

**证明** 将"1"化为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 及 $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$，分别代入已知条件，可得：

$\dfrac{\cos^3\alpha-\cos^2\beta}{\cos\beta}=\dfrac{\sin^2\beta-\sin^3\alpha}{\sin\beta}$ 及 $\dfrac{\cos^3\alpha-\cos^2\alpha\cos\beta}{\cos\beta}=\dfrac{\sin^2\alpha\sin\beta-\sin^3\alpha}{\sin\beta}$,

两式相除得 $\dfrac{\cos^2\alpha+\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}$,

即 $1+\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}+\left(\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2=1+\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}+\left(\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2$.

得 $\left(\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2-\left(\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2+\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=0$,

故 $\left(\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)\left(\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}+1\right)=0$.

**注** 将"1"改写使得式子为齐次形式，对证明十分有利

**例 11** 已知 $x\cos\theta-y\sin\theta=a$，$(x-a\sin\theta)^2+(y-a\sin\theta)^2=a^2$，求证：$x^2+y^2=2a^2$.

**分析** 意图很明显，消去 $\theta$.

**证明** 由 $(x-a\sin\theta)^2+(y-a\cos\theta)^2=a^2$ 知

$x^2+y^2-2a(x\sin\theta+y\cos\theta)=0$ ……①

又 $(x-a\sin\theta)^2+(y-a\cos\theta)^2=a^2=(x\cos\theta-y\sin\theta)^2$,

即 $(x\sin\theta+y\cos\theta-a)^2=0$,

故 $x\sin\theta+y\cos\theta=a$.

代入①式得 $x^2+y^2-2a^2=0$,

即 $x^2+y^2=2a^2$.

**例 12** 已知 $\begin{cases}\sin x+\sin y=2a\\ \cos x+\cos y=2b\\ \tan x+\tan y=2c\end{cases}$，求证：$a(b+ac)=c(a^2+b^2)^2$.

**分析** 消去 $x,y$.



**证明** $a=\frac{1}{2}(\sin x+\sin y)=\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$,

$b=\frac{1}{2}(\cos x+\cos y)=\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$,

故 $\tan\frac{x+y}{2}=\frac{a}{b}$,这样由万能公式可得:

$\sin(x+y)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$, $\cos(x+y)=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$.

而 $4(a^2+b^2)=(\sin x+\sin y)^2+(\cos x+\cos y)^2=2+2(\cos x\cos y+\sin x\sin y)$

$=2+2\cos(x-y)$

故 $\cos(x-y)=2(a^2+b^2)-1$.

又 $c=\frac{1}{2}(\tan x+\tan y)=\frac{\sin x\cos y+\sin y\cos x}{2\cos x\cos y}=\frac{\sin(x+y)}{2\cos x\cos y}=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$

$$=\frac{\frac{2ab}{a^2+b^2}}{\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}+2(a^2+b^2)-1}=\frac{2ab}{b^2-a^2+2(a^2+b^2)^2-(a^2+b^2)},$$

即 $a(b+ca)=c(a^2+b^2)^2$.

**注** 对于条件式 $\begin{cases}m\sin x+n\sin y=p\\m\cos x+n\cos y=q\end{cases}$,通常采用平方和求 $\cos(x-y)$,若 $m=n$,则又可用和差化积求 $\tan\frac{x+y}{2}$.

**例 13** 已知 $\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}=1-\frac{\tan(\alpha-\beta)}{\tan\alpha}$,求证:$\tan^2\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta$.

**证明** $\sin^2\gamma=\sin^2\alpha\cdot\left[1-\frac{\tan(\alpha-\beta)}{\tan\alpha}\right]=\sin^2\alpha\frac{\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)}$

$=\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}$,

所以 $\tan^2\gamma=\frac{\sin^2\gamma}{1-\sin^2\gamma}=\frac{\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}}{1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\tan\alpha\cdot\tan\beta$.

**例 14** 已知 $\cos\alpha=\tan\beta$, $\cos\beta=\tan\gamma$, $\cos\gamma=\tan\alpha$,则 $\sin^2\alpha=\sin^2\beta=\sin^2\gamma=\cos^4\alpha=\cos^4\beta=\cos^4\gamma=4\sin^2 18^\circ$.

**证明** 令 $x=\cos\alpha$, $y=\cos\beta$, $z=\cos\gamma$,则

$x^2y^2=\tan^2\beta\cdot\cos^2\beta=\sin^2\beta=1-y^2$……①

$y^2z^2=\tan^2\gamma\cos^2\gamma=\sin^2\gamma=1-z^2$ ……②

$z^2x^2=\tan^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\sin^2\alpha=1-x^2$ ……③

由①得 $y^2=\dfrac{1}{1+x^2}$ ……④

④代入②得：$z^2=\dfrac{2+x^2}{1+x^2}$ ……⑤

⑤代入③得 $2x^4+2x^2-2=0$，

所以 $x^2=\dfrac{\sqrt5-1}{2}$，故 $x^2=y^2=z^2=\dfrac{\sqrt5-1}{2}=2\cdot\sin18^\circ$.

所以 $\sin^2\alpha=\sin^2\beta=\sin^2\gamma=1-x^2=\left(\dfrac{\sqrt5-1}{2}\right)^2=4\sin^2 18^\circ$.

**注** 利用三角公式将三角恒等式的证明转化为代数方程求解，有利于从复杂的公式变形中抓住代数本质，从而简化证明.

**例 15** 已知 $\dfrac{\sin^4x}{a}+\dfrac{\cos^4x}{b}=\dfrac{1}{a+b}$，求证：$\dfrac{\sin^{4n}x}{a^{2n-1}}+\dfrac{\cos^{4n}x}{b^{2n-1}}=\dfrac{1}{(a+b)^{2n-1}}$，$n\in\mathbf{N}^*$

**证明 1** 令 $\begin{cases}u=\sin^2x\\v=\cos^2x\end{cases}$，则 $0\leqslant u,v\leqslant1$，且 $u+v=1$.

因为 $\begin{cases}\dfrac{u^2}{a}+\dfrac{v^2}{b}=\dfrac{1}{a+b}\\u+v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{a}{a+b}\\v=\dfrac{b}{a+b}\end{cases}$

所以 $\dfrac{\sin^{4n}x}{a^{2n-1}}+\dfrac{\cos^{4n}x}{b^{2n-1}}=\dfrac{u^{2n}}{a^{2n-1}}+\dfrac{v^{2n}}{b^{2n-1}}=\dfrac{\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^{2n}}{a^{2n-1}}+\dfrac{\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^{2n}}{b^{2n-1}}$

$$=\frac{a}{(a+b)^{2n}}+\frac{b}{(a+b)^{2n}}=\frac{1}{(a+b)^{2n-1}}.$$

**证明 2** 因为 $\dfrac{\sin^4x}{a}+\dfrac{\cos^4x}{b}\geqslant\dfrac{(\sin^2x+\cos^2x)^2}{a+b}=\dfrac{1}{a+b}$，

当且仅当 $\dfrac{\sin^2x}{a}=\dfrac{\cos^2x}{b}$ 即 $\dfrac{\sin^2x}{a}=\dfrac{\cos^2x}{b}=\dfrac{\sin^2x+\cos^2x}{a+b}=\dfrac{1}{a+b}$ 时等号成立.

所以 $\sin^2x=\dfrac{a}{a+b}$，$\cos^2x=\dfrac{b}{a+b}$，代入即可.

**注** 证明 2 中我们利用不等式的方式来证明等式，有时是迫不得已，有时是出奇制胜.

**例 16** 求证 对于任意 $\alpha\in(-\infty,+\infty)$，$|2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b|\leqslant1$ 成立的充要条件是 $2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b=\cos2\alpha$.

**证明** 充分性：当 $2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b=\cos2\alpha$ 时，显然有 $|2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b|\leqslant1$.

必要性：若 $|2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b|\leqslant1$ 对于任意 $\alpha\in(-\infty,+\infty)$ 均成立，则

(1)当 $b>-1$ 时，

$2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b=2\cos^2\alpha-1+a\cos\alpha+(b+1)$，

由于 $b+1>0$，取 $\alpha$ 使 $a\cos\alpha=|a|$，则

$|2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b|=1+|a|+(b+1)>1+|a|\geqslant1$，矛盾.

(2)当 $b<-1$ 时，

令 $\cos\alpha=0$，则 $|2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b|=|b|>1$，矛盾.

由(1)，(2)可知 $b=-1$.

现取 $\alpha$，使 $a\cos\alpha=|a|$，则

$|2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b|=1+|a|\geqslant1$，故 $|a|=0$，即 $a=0$.

这样 $2\cos^2\alpha+a\cos\alpha+b=2\cos^2\alpha-1=\cos2\alpha$.

**例17** 已知锐角 $\alpha$、$\beta$ 满足 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$，求证：$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

**证明1** $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\Leftrightarrow\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\beta)=-\sin\beta(\sin\beta-\cos\alpha)$……①

$\Leftrightarrow\sin\alpha[\sin\alpha-\sin(90^\circ-\beta)]+\sin\beta[\sin\beta-\sin(90^\circ-\alpha)]=0$

$\Leftrightarrow2\sin\alpha\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin\beta\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sin\alpha\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\beta\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]=0$.

不妨设 $\alpha\geqslant\beta$，则 $\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{4}<\frac{\beta-\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$

所以 $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0$，$\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0$，当然 $\sin\alpha>0$，$\sin\beta>0$

所以 $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$，又因为 $-\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}=0$.

即 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

**证明2** 由①式知，$\sin\alpha-\cos\beta$ 与 $\cos\alpha-\sin\beta$ 同号或同为0.

若 $\sin\alpha>\cos\beta$ 且 $\cos\alpha>\sin\beta$，则 $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha>\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$，矛盾

若 $\sin\alpha<\cos\beta$ 且 $\cos\alpha<\sin\beta$，则 $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha<\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$，矛盾

故 $\cos\alpha=\sin\beta$ 且 $\sin\alpha=\cos\beta$，又因为 $\alpha$、$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，

故 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.





**例 18** 已知 $\alpha$、$\beta$ 为锐角，则 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ 的充要条件为：$\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}=1$

**证明** 必要性 因为 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，则 $\sin^2\alpha=\cos^2\beta$，$\cos^2\alpha=\sin^2\beta$，

则 左边 $=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1=$ 右边.

充分性.

方法 1：由 Cauchy 不等式知

$$\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}\geqslant\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2}{\cos^2\beta+\sin^2\beta}=\frac{1^2}{1}=1$$

当且仅当 $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}$，

即 $\sin^2\alpha\sin^2\beta-\cos^2\alpha\cos^2\beta=0$，

即 $(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=0$，

即 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=0$ 时等号成立.

又因为 $\alpha$、$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，

$0<\alpha+\beta<\pi$，所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

方法 2：$\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}+\cos^2\beta\geqslant2\sin^2\alpha$，

$\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}+\sin^2\beta\geqslant2\cos^2\alpha$，

相加得：$\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}\geqslant1$，

所以 $\begin{cases}\sin^2\alpha=\cos^2\beta\\ \cos^2\alpha=\sin^2\beta\end{cases}$ 同上可得.

**注** 下面给出与此类似的一些推广问题.

**引申 1** 已知 $\alpha$、$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ 的充要条件为：$\frac{\sin^3\alpha}{\cos\beta}+\frac{\cos^3\alpha}{\sin\beta}=1$.

必要性显然

下证充分性

方法 1：$\frac{\sin^3\alpha}{\cos\beta}+\frac{\cos^3\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin^4\alpha}{\cos\beta\sin\alpha}+\frac{\cos^4\alpha}{\sin\beta\cos\alpha}\geqslant\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2}{(\cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha)}=\frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}\geqslant1$，

当且仅当 $\begin{cases}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\beta\sin\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin\beta\cos\alpha}\\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\end{cases}$，即 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ 时取“$=$”



方法 2 $\frac{\sin^3\alpha}{\cos\beta}+\frac{\sin^3\alpha}{\cos\beta}+\cos^2\beta\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{\sin^3\alpha}{\cos\beta}\cdot\frac{\sin^3\alpha}{\cos\beta}\cdot\cos^2\beta}=3\sin^2\alpha$，

同理，$\frac{\cos^3\alpha}{\sin\beta}+\frac{\cos^3\alpha}{\sin\beta}+\sin^2\beta\geqslant 3\cos^2\alpha$，

两式相加即有：$\frac{\cos^3\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin^3\alpha}{\cos\beta}\geqslant 1$，

当且仅当$\begin{cases}\frac{\sin^3\alpha}{\cos\beta}=\cos^2\beta\\ \frac{\cos^3\alpha}{\sin\beta}=\sin^2\beta\end{cases}$，即 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$时取"="。

引申 2 已知$\alpha$、$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$的充要条件为：

$\frac{\sin^{k+2}\alpha}{\cos^k\beta}+\frac{\cos^{k+2}\alpha}{\sin^k\beta}=1$，$k\in\mathbf{N}^*$。

必要性显然

下证充分性：

方法 1：(i)当 $k=2m$，$m\in\mathbf{N}^*$ 时，

$\frac{\sin^{2m+2}\alpha}{\cos^{2m}\beta}+\underbrace{\cos^2\beta+\cos^2\beta+\cdots+\cos^2\beta}_{m个}\geqslant(m+1)\cdot\sqrt[m+1]{\frac{\sin^{2m+2}\alpha}{\cos^{2m}\beta}\cdot\underbrace{\cos^2\beta\cdots\cos^2\beta}_{m个}}$

$=(m+1)\sin^2\alpha$；

$\frac{\cos^{2m+2}\alpha}{\sin^{2m}\beta}+\underbrace{\sin^2\beta+\sin^2\beta+\cdots+\sin^2\beta}_{m个}\geqslant(m+1)\cdot\sqrt[m+1]{\frac{\cos^{2m+2}\alpha}{\sin^{2m}\beta}\cdot\underbrace{\sin^2\beta\cdot\sin^2\beta\cdots\sin^2\beta}_{m个}}$

$=(m+1)\cos^2\alpha$，

两式相加得：$\frac{\sin^{2m+2}\alpha}{\cos^{2m}\beta}+\frac{\cos^{2m+2}\alpha}{\sin^{2m}\beta}\geqslant 1$，

当且仅当 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$时取"="。

(ii)当 $k=2m-1$，$m\in\mathbf{N}^*$ 时，

$\frac{\sin^{2m+1}\alpha}{\cos^{2m-1}\beta}+\frac{\sin^{2m+1}\alpha}{\cos^{2m-1}\beta}+\underbrace{\cos^2\beta+\cdots+\cos^2\beta}_{2m-1}$

$\geqslant(2m+1)\cdot\sqrt[2m+1]{\frac{\sin^{2m+1}\alpha}{\cos^{2m-1}\beta}\cdot\frac{\sin^{2m+1}\alpha}{\cos^{2m-1}\beta}\cdot\underbrace{\cos^2\beta\cdots\cos^2\beta}_{2m-1}}=(2m+1)\cdot\sin^2\alpha$；

$\frac{\cos^{2m+1}\alpha}{\sin^{2m-1}\beta}+\frac{\cos^{2m+1}\alpha}{\sin^{2m-1}\beta}+\underbrace{\sin^2\beta+\cdots+\sin^2\beta}_{2m-1}\geqslant(2m+1)\cdot\cos^2\alpha$，





两式相加得 $\frac{\sin^{2m+2}\alpha}{\cos^{2m}\beta}+\frac{\cos^{2m+2}\alpha}{\sin^{2m}\beta}\geqslant 1$.

当且仅当 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ 时取"＝"

方法 2 $\frac{\sin^{k+2}\alpha}{\cos^k\beta}+\underbrace{\cos\beta\sin\alpha+\cdots+\cos\beta\sin\alpha}_{k个}\geqslant(k+1)\sin^2\alpha\quad(A_{k+1}\geqslant G_{k+1})$;

$\frac{\cos^{k+2}\alpha}{\sin^k\beta}+\underbrace{\cos\alpha\sin\beta+\cdots+\cos\alpha\sin\beta}_{k个}\geqslant(k+1)\cos^2\alpha\quad(A_{k+1}\geqslant G_{k+1})$.

两式相加得，

$\frac{\sin^{k+2}\alpha}{\cos^k\beta}+\frac{\cos^{k+2}\alpha}{\sin^k\beta}\geqslant(k+1)-k\sin(\alpha+\beta)\geqslant 1$.

当且仅当 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ 时取"＝"

**引申 3** 已知 $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，求证：$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ 的充要条件为 $\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\sin^4\beta}{\cos^2\alpha}=1$.

必要性显然

下证充分性.

方法 1：令 $\sin^2\alpha=a,\cos^2\beta=b,a,b\in(0,1)$，则

$1=\frac{a^2}{b}+\frac{(1-b)^2}{1-a}\Leftrightarrow b(1-a)=a^2-a^3+b^3-2b^2+b$

$\Leftrightarrow(b^3-a^3)-(b^2-a^2)-(b^2-ab)=0\Leftrightarrow(b-a)(a^2+ab+b^2-2b-a)=0$

因为 $a,b\in(0,1)$，所以 $a>a^2,b>b^2,b>ab$，

因为 $a^2+ab+b^2-2b-a<0$，

故 $b=a$，即 $\sin^2\alpha=\cos^2\beta$，

所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

方法 2：$0=\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\sin^4\beta}{\cos^2\alpha}-1=\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\sin^4\beta}{\cos^2\alpha}-(\cos^2\beta+\sin^2\beta)$

$=\frac{\sin^4\alpha-\cos^4\beta}{\cos^2\beta}+\frac{\sin^2\beta(\sin^2\beta-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}$ ……①

因为 $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$.

若 $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$，则

$\cos\alpha>\cos(\frac{\pi}{2}-\beta)=\sin\beta>0$，所以 $\cos^2\alpha>\sin^2\beta$；



$\cos\beta>\cos(\frac{\pi}{2}\ \ \beta)\quad \sin\beta>0$，所以 $\cos^4\beta>\sin^4\alpha$.

①式右边$<0$矛盾

同理，若 $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$，则①式右边$>0$，矛盾.

如方法2，直接可将结论拓展到

$$\frac{\sin^{k+2}\alpha}{\cos^k\beta}+\frac{\sin^{k+2}\beta}{\cos^k\alpha}=1,k>0.$$

方法2能否解决例18的充分性呢？

$$\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\Leftrightarrow\frac{\sin^2\alpha(\sin^2\alpha-\cos^2\beta)}{\cos^2\beta}+\frac{\cos^2\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\beta)}{\sin^2\beta}=0.$$

因为 $\alpha$、$\beta\in(0,\pi)$，若 $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}$，则 $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$

若 $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\alpha>\sin\beta>0$，$0<\sin\alpha<\cos\beta$，

所以 $\cos^2\alpha>\sin^2\beta>0$，$\sin^2\alpha<\cos^2\beta$.

失败！采用这样的方式无法得出结论，失败并不可怕，关键要敢于尝试.

这一节我们通过无条件恒等变形及条件恒等变形，介绍其中一些常用方法与技巧，读者可以结合第一章及下节来细细体会恒等变形的出发点和突破口，这对你的解题能力的提高大有裨益.

# §2.2 三角恒等关系(二)

这一节我们介绍三角形内的常见恒等关系.这是三角形中的一些基本的数量关系，从各个方面刻画三角形中的种种不变量.牢固掌握这些恒等关系，将更有益于我们看出问题的本质，发现问题的源泉.在后面的章节也可以得到进一步的印证.

### §2.2.1 基本恒等式

1. $A+B+C=\pi$，且 $A$、$B$、$C\in(0,\pi)$.

这是三角形的一个最基本的恒等关系，在恒等式的变形中将不断地被利用.对于 $A$、$B$、$C\in(0,\pi)$在已知三角形形状的前提下，可进一步限定：当$\triangle ABC$为锐角三角形时，$A$、



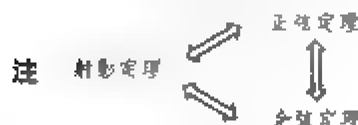


$B、C\in(0,\frac{\pi}{2})$；当$\triangle ABC$为直角三角形时，$A、B、C$中恰好有一个角为直角；当$\triangle ABC$为钝角三角形时，$A、B、C$中恰好有一个角为钝角．

2. 正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

3. 余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

4. 射影定理 $a=b\cos C+c\cos B$，$b=c\cos A+a\cos C$，$c=a\cos B+b\cos A$

注 


**证明** 正弦定理⇒射影定理

$a=2R\sin A=2R\sin(B+C)=2R(\sin B\cos C+\cos B\sin C)=b\cos C+c\cos B$.

射影定理⇒正弦定理

$a^2-b^2=a(b\cos C+c\cos B)-b(a\cos C+c\cos A)=(a\cos B-b\cos A)c$

$\quad=(a\cos B-b\cos A)(a\cos B+b\cos A)=a^2\cos^2 B-b^2\cos^2 A$

$\Leftrightarrow a^2(1-\cos^2 B)=b^2(1-\cos^2 A)\Leftrightarrow a^2\sin^2 B=b^2\sin^2 A\Leftrightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

余弦定理⇒射影定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$；

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$；

两式相加得：$2c^2=2bc\cos A+2ac\cos B$.

即 $c=b\cos A+a\cos B$.

射影定理⇒余弦定理

$a^2-b^2-c^2=a(b\cos C+c\cos B)-b(c\cos A+a\cos C)-c(a\cos B+b\cos A)$

$\qquad=-2bc\cos A$，

即 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

5. 正切定理 $\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$，$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}$，$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$.

6. 半角公式 $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$，$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$，

$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$.



7. 模尔外德公式：$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$，$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$．

**注** 模尔外德公式中包含了三边 $a$、$b$、$c$ 及三个角 $A$、$B$、$C$，通常用来检验所解三角形是否正确．

8. 面积公式

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{4R}=pr=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

$$=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin(B+C)}=\frac{1}{2}ab\cdot\sqrt{1-\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}}=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=p^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=Rr(\sin A+\sin B+\sin C)=\frac{a^2+b^2+c^2}{4(\cot A+\cot B+\cot C)}.$$

**注** 三角形的面积公式还有许多，我们只列出其中的一小部分，主要使读者了解三角形的面积是联系许多恒等关系的纽带．

9. 几个常用长度的计算方法：

$$R=\frac{abc}{4S},r=\frac{S}{p},h_a=\frac{2S}{a},$$

$$m_a=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2b^2+2c^2-a^2},t_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}=\frac{2bc}{b+c}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

**注1** 当$\triangle ABC$ 的三边长度固定后，$S_{\triangle ABC}$ 的面积随之固定．这样，$R$、$r$、$h_a$ 也固定下来，均联系于 $S_{\triangle ABC}$．

**注2** 求三角形某边上的中线长，只需利用平行四边形的对角线平方和等于四边的平方和即可．

**注3** 下面运用两种方法证明：

$$t_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}=\frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

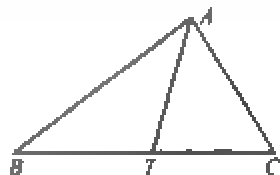


图 2-2

方法 1：设 $AT$ 是$\triangle ABC$ 的内角平分线(如图 2-2 所示)

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABT}+S_{\triangle ATC}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}AB\cdot AT\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}AC\cdot AT\cdot\sin\frac{A}{2}$$

$\Leftrightarrow AT=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}\Leftrightarrow t_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}=\frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

方法2：如图2-3，△ABC的内角平分线AT的延长线交△ABC的外接圆于M，连接BM，则

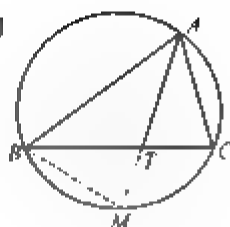



图2-3

因为$\triangle BMT\backsim\triangle AMB$，所以$\frac{MT}{MB}=\frac{BM}{AM}=\frac{BM}{AT+MT}$，

所以$BM^2=MT\cdot AT+MT^2=BT\cdot TC+MT^2$，

再利用$MT\cdot AT=BT\cdot TC$，知$MT^2=\frac{BT^2TC^2}{AT^2}$，

故 $BM^2=BT\cdot TC+\frac{BT^2\cdot TC^2}{AT^2}$.

又因为$\triangle BMT\backsim\triangle ACT$，所以$\frac{BM}{AC}=\frac{BT}{AT}$，所以$BM^2=\frac{AC^2\cdot BT^2}{AT^2}$，

这样，$\frac{AC^2\cdot BT^2}{AT^2}=BT\cdot TC+\frac{BT^2\cdot TC^2}{AT^2}$.

所以$AT^2=\frac{BT}{TC}\cdot(AC^2-TC^2)=\frac{AB}{AC}(AC^2-TC^2)=\frac{c}{b}\cdot[b^2-(\frac{b}{b+c})^2\cdot a^2]$

$$=\frac{bc}{(b+c)^2}(b+c+a)(b+c-a)=\frac{4bc\cdot p\cdot(p-a)}{(b+c)^2}.$$

即$t_a=\frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$.

10. $a=r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$，

$b=r\left(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)$，

$c=r\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)$.

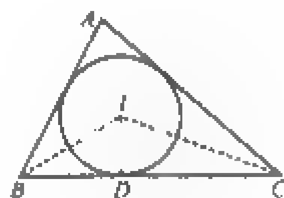



图2-4

如图2-4，$a=BC=BD+DC=r\cot\frac{B}{2}+r\cot\frac{C}{2}$.

### §2.2.2 三角形中常见恒等式

1. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

**证明** 等式左边$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin(B+A)$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$



$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\text{等式右边}.$$

2. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$.

3. $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=-4\cos\frac{3}{2}A\cos\frac{3}{2}B\cos\frac{3}{2}C$.

4. $\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C=-4\sin 2A\sin 2B\sin 2C$.

5. $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

**证明** 等式左边 $=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\cos(A+B)$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\cos^2\frac{A+B}{2}$$

$$=1+2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=1+2\cos\frac{\pi-C}{2}\cdot(-2)\sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{-B}{2}\right)$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\text{等式右边}.$$

6. $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$

7. $\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=1-4\sin\frac{3}{2}A\sin\frac{3}{2}B\sin\frac{3}{2}C$

8. $\cos 4A+\cos 4B+\cos 4C=-1-4\cos 2A\cos 2B\cos 2C$.

9. $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

**证明** $\tan C=-\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}$,

故 $\tan A\tan B\tan C-\tan C=\tan A+\tan B$,

这样,$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

10. $\cot A\cdot\cot B+\cot B\cdot\cot C+\cot C\cdot\cot A=1$.

11. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$.

12. $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$.

13. $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$.

**证明** 等式左边 $=\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)$





$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(-1-4\cos A\cos B\cos C)=2+2\cos A\cos B\cos C=\text{等式右边}.$$

14. $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\cos A\cos B\cos C$

15. $\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C+\cos A\cos B\sin C=\sin A\sin B\sin C$

**证明 1** $0=\sin(A+B+C)=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C$.

**证明 2** $\Leftrightarrow \cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1$

16. $\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C=-1+\cos A\cos B\cos C$

17. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$.

**证明** 等式左边 $=2R\sin A\cos A+2R\sin B\cos B+2R\sin C\cos C=R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=4R\sin A\sin B\sin C=$ 等式右边.

18. $p=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

**证明** 等式左边 $=\frac{1}{2}(a+b+c)=R(\sin A+\sin B+\sin C)=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=$ 等式右边.

19. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{p}$.

**证明** 等式左边 $=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\cdot\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}\cdot\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$

$=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^4}}=\frac{S}{p^2}=\frac{pr}{p^2}=\frac{r}{p}=$ 等式右边.

20. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}$.

**方法 1** $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{p}{4R}\cdot\frac{r}{p}=\frac{r}{4R}$.

**方法 2** $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}\cdot\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

$=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}=\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p\cdot abc}=\frac{S^2}{p\cdot 4R\cdot S}=\frac{S}{4R\cdot p}=\frac{r\cdot p}{4R\cdot p}=\frac{r}{4R}$

**方法 3** 因为 $a=r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)=2R\sin A\Leftrightarrow 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=$

$r\cdot\left(\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\right)=r\cdot\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=r\cdot\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\Leftrightarrow\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}$



21. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{p-c}{p}$.

**证明** $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\cdot\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}=\frac{p-c}{p}$

22. $\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{a+b+c}=\frac{r}{R}$.

23. $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{p}{R}$.

24. $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$.

以上24个恒等关系是三角形中的一些最基本、最常用的恒等式，其中许多均有相似性，有些还是等式链，如：$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1+\frac{r}{R}$，你可以自行进行总结、归纳，使之更有条理，更有利于理解、记忆和应用．当然，平时看到或自己推导出的三角形中的恒等式也可以将之收录备用．

### §2.2.3 一些三角形内恒等变形问题的求解

解决三角形内恒等变形问题要时刻注意隐含条件 $A+B+C=\pi$，$A$、$B$、$C>0$ 及其上述一些基本定理，基本公式的灵活应用．

**例1** 在$\triangle ABC$中，已知 $x\sin A+y\sin B+z\sin C=0$，求$(y+z\cos A)(z+x\cos B)(x+y\cos C)+(y\cos A+z)(z\cos B+x)(x\cos C+y)$的值．

**解** 在$\triangle ABC$中，$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，代入已知条件中得，

$x\sin A+y\sin B+z(\sin A\cos B+\cos A\sin B)=0$，即

$\sin A(x+z\cos B)=-\sin B(y+z\cos A)$，

同理，$\sin B(y+x\cos C)=-\sin C(z+x\cos B)$，

$\sin C(z+y\cos A)=-\sin A(x+y\cos C)$，

三式相乘有：

$(x+z\cos B)(y+x\cos C)(z+y\cos A)=-(y+z\cos A)(z+x\cos B)(x+y\cos C)$，

即$(y+z\cos A)(z+x\cos B)(x+y\cos C)+(y\cos A+z)(z\cos B+x)(x\cos C+y)=0$．

**例2** 在$\triangle ABC$中，已知 $a=2b\cos C$，$\sin A\sin\left(\frac{B}{2}+C\right)=\sin C\left(\sin\frac{B}{2}+\sin A\right)$，求这个三角形各个内角的度数（不用反三角函数表示）．

**解** 设$\triangle ABC$的外接圆半径为$R$，根据已知 $a=2b\cos C$，及射影定理 $a=b\cos C+c\cos B$ 知，$b\cos C=c\cdot\cos B$，即 $\sin B\cos C=\sin C\cos B$，这样 $\sin(B-C)=0$，而 $B-C\in(-\pi,\pi)$，所以，$B=C$，$A=\pi-2B$，代入 $\sin A\sin\left(\frac{B}{2}+C\right)=\sin C\left(\sin\frac{B}{2}+\sin A\right)$，得 $\sin\frac{B}{4}$





$\cos\frac{9B}{4}=0$，而 $0<B<\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\frac{9B}{4}=0$，从而 $B=\frac{2\pi}{9}$，于是，$A=\frac{5}{9}\pi$，$B=C=\frac{2\pi}{9}$.

**例 3** 在$\triangle ABC$中，已知 $\tan A+\tan B+\tan C=-\frac{1}{6}$，$\tan^3 A+\tan^3 B+\tan^3 C=-\frac{181}{216}$，求 $A$、$B$、$C$ 的大小.

**解** 在$\triangle ABC$中，有 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

而 $\tan^3 A+\tan^3 B+\tan^3 C-3\tan A\tan B\tan C=(\tan A+\tan B+\tan C)(\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A)=(\tan A+\tan B+\tan C)[(\tan A+\tan B+\tan C)^2-3(\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A)]$

将已知条件代入得 $\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A=-\frac{2}{3}$.

所以 $\begin{cases}\tan A+\tan B+\tan C=-\frac{1}{6}\\ \tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A=-\frac{2}{3}\\ \tan A\tan B\tan C=-\frac{1}{6}\end{cases}$

这样，$\tan A$、$\tan B$、$\tan C$ 为方程 $x^3+\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}=0$ 的根.

而 $x^3+\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}(x+1)(2x-1)(3x-1)=0$,

故 $x_1=-1$，$x_2=\frac{1}{2}$，$x_3=\frac{1}{3}$，即 $\{\tan A,\tan B,\tan C\}=\{-1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\}$

所以，$\triangle ABC$ 的三个内角的大小为 $\frac{3}{4}\pi$，$\arctan\frac{1}{2}$，$\arctan\frac{1}{3}$.

**例 4** 在$\triangle ABC$中，已知 $a-b=c\cos B-c\cos A$，试判断这个三角形的形状.

**分析** 欲判断三角形的形状，必须把边和角的函数统一起来，即把已知条件中的边都化为角的函数，或把角的函数都化为边，从而求出边或角的直接关系，再加以确定.

**解法 1** 由正弦定理，将已知条件变为纯三角函数，得

$\sin A-\sin B=\sin C\cos B-\sin C\cos A$

$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot(-2)\sin\frac{B+A}{2}\sin\frac{B-A}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}(1-2\cos^2\frac{C}{2})=0\Leftrightarrow 2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}\cos C=0$

由于 $0<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\frac{A-B}{2}<\frac{\pi}{2}$，$0<C<\pi$，



故 $\frac{A-C}{2}=0$ 或 $C=\frac{\pi}{2}$，即 $A=C$ 或 $C=\frac{\pi}{2}$.

因此，△ABC 是等腰三角形或直角三角形.

**解法2** 由余弦定理，将已知条件变为边的关系式，得

$a-b=c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\Leftrightarrow a^3-b^3-a^2b+ab^2-ac^2+bc^2=0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)-ab(a-b)-c^2(a-b)=0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$

$\Leftrightarrow a=b$ 或 $a^2+b^2=c^2$.

因此，△ABC 是等腰三角形或直角三角形.

**例5** 在△ABC 中，若 $h_a+h_b+h_c=9r$，其中 $h_a$、$h_b$、$h_c$ 为三边上的高，$r$ 为三角形内切圆的半径，试确定三角形的形状.

**分析** 化为纯三角形式，看起来太麻烦了，化为边的关系试试看.

**解** 设△ABC 的面积为 $S$，则 $h_a=\frac{2S}{a}$，$h_b=\frac{2S}{b}$，$h_c=\frac{2S}{c}$.

又 $S=\frac{1}{2}(a+b+c)r$，则 $r=\frac{2S}{a+b+c}$，这样

$h_a+h_b+h_c=9r\Leftrightarrow 2S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=9\cdot\frac{2S}{a+b+c}$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)=9\Leftrightarrow(a+b+c)(bc+ca+ab)=9abc$

$\Leftrightarrow a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2=0$

$\Leftrightarrow a=b=c$.

即△ABC 为正三角形.

**注** 由于 $9=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ 及 $a,b,c>0$，我们利用 Cauchy 不等式有

$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$，当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

这样即可得△ABC 为正三角形.

**例6** 在△ABC 中，求 $a^2\sin(B-C)+b^2\sin(C-A)+c^2\sin(A-B)$ 的值.

**分析** 解决形如 $c^2\cdot\sin(A-B)$ 的问题，通常是△ABC 中的一个常见式子 $\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$ 的一个应用.

**证明** 首先证明一个引理.





引理 在$\triangle ABC$中，有

$$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C},\ \frac{c^2-a^2}{b^2}=\frac{\sin(C-A)}{\sin B},\ \frac{b^2-c^2}{a^2}=\frac{\sin(B-C)}{\sin A}.$$

事实上，只需证明其中一个即可，不妨证$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

$$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin^2A-\sin^2B}{\sin^2C}=\frac{(\sin A-\sin B)(\sin A+\sin B)}{\sin^2C}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cdot 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\sin(A+B)\sin C}=\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin(A+B)\sin C}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$$

现回到原题，由于$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$，

故$c^2\sin(A-B)=c(a^2-b^2)\sin C=\frac{c^2(a^2-b^2)}{2R}$，

同理，$b^2\sin(C-A)=\frac{b^2(c^2-a^2)}{2R}$，$a^2\sin(B-C)=\frac{a^2(b^2-c^2)}{2R}$.

三式相加，得

$$a^2\sin(B-C)+b^2\sin(C-A)+c^2\sin(A-B)=\frac{c^2(a^2-b^2)+b^2(c^2-a^2)+a^2(b^2-c^2)}{2R}=0,$$

所以，所求式子的值为 0.

**注** 上述引理是一个很有用的公式，利用它很容易构造一些恒等式，如在$\triangle ABC$中

(1)$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0$；

(2)$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0$；

(3)$\frac{\sin(A-B)}{ab}+\frac{\sin(B-C)}{bc}+\frac{\sin(C-A)}{ca}=0$；

(4)$\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin2C=0$；

(5)$S_{\triangle ABC}=\frac{(a^2-b^2)\sin A\sin B}{2\sin(A-B)}=\frac{a^2-b^2}{2(\cot B-\cot A)}$等等

**例 7** 在$\triangle ABC$中，实数$x$满足$\cos(x+A)\cos(x+B)\cos(x+C)+\cos^3x=0$，求证：

(1)$\tan x=\cot A+\cot B+\cot C$；

(2)$\sec^2x=\csc^2A+\csc^2B+\csc^2C$.

**分析** (2)由$(1)^2+1$即可得到，关键是证明(1)式，目标是将$x$分离出来

**证明** (1)令$k=\cot A+\cot B+\cot C$，则

$$k=\cot A+\cot B+\cot C=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos C}{\sin C}$$



$$=\frac{\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C}{\sin A\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\cos A\cos B\cos C-\cos(A+B+C)}{\sin A\sin B\sin C}=\frac{\cos A\cos B\cos C+1}{\sin A\sin B\sin C}$$

$$=\cot A\cot B\cot C+\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}.$$

而在△ABC 中，有 $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$

$0=\cos^3x+\cos(x+A)\cos(x+B)\cos(x+C)=\cos^3x+(\cos x\cos A-\sin x\sin A)\cdot(\cos x\cos B-\sin x\sin B)(\cos x\cos C-\sin x\sin C)$，两边同除以 $\cos^3x\cdot\sin A\sin B\sin C$，得

$$(\tan x-\cot A)(\tan x-\cot B)(\tan x-\cot C)-\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}=0$$

展开上式得

$\tan^3x-(\cot A+\cot B+\cot C)\tan^2x+(\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A)\tan x-\cot A\cot B\cot C-\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}=0$，

即 $\tan^3x-k\tan^2x+\tan x-k=0$，故 $(\tan^2x+1)(\tan x-k)=0$，

所以，$\tan x=k$，即 $\tan x=\cot A+\cot B+\cot C$.

2) $\sec^2x=1+\tan^2x=1+(\cot A+\cot B+\cot C)^2=1+\cot^2A+\cot^2B+\cot^2C+2(\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A)=3+\cot^2A+\cot^2B+\cot^2C=\csc^2A+\csc^2B+\csc^2C$.

注　这是一道很好的三角恒等式变形题.

# §2.3　三角不等关系与最值(一)

三角不等式结合了代数不等式的灵活与三角函数的多变的特点，使问题更加灵活多姿，这也使之在各级各类数学奥林匹克赛题中屡见不鲜，见之不同，解决这类问题一定要在利用代数不等式强有力的证明手段的前提下，时刻注意三角函数自身的特点，两者兼顾，下面我们通过几个例子来说明.

**例 1**　(1)求函数 $f(\theta)=\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$的最大值；

(2)求函数 $g(\theta)=\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$的最大值.





**解** (1) $f(\theta)=2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}=2\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos^4\frac{\theta}{2}}$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\leqslant\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}{3}\right)^3}$$

$=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$，当且仅当 $\theta=2\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号．所以，$f(\theta)$ 的最大值为 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$．

(2) 由于 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，故 $g(\theta)>0$，$g^2(\theta)=\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\theta=\frac{1-\cos\theta}{2}\cdot\cos^2\theta=\frac{2(1-\cos\theta)\cdot\cos\theta\cdot\cos\theta}{4}\leqslant\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{2(1-\cos\theta)+\cos\theta+\cos\theta}{3}\right]^3=\frac{2}{27}$，当且仅当 $\theta=\arccos\frac{2}{3}$ 时取等号．

所以，$g(\theta)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{9}$．

当然也可以如下这样：

$$g(\theta)=\sin\frac{\theta}{2}\cdot\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\cdot\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left[\frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}+\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{3}\right]^3}=\frac{\sqrt{6}}{9}．$$

当且仅当 $\theta=2\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时取等号．

故 $g(\theta)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{9}$．

**注** 令 $t=\sin\frac{\theta}{2}$，$t\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则 $f(\theta)=2t(1-t^2)=-2t^3+2t$，$t\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$g(\theta)=t(1-2t^2)=-2t^3+t$，$t\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 均可转化为关于 $t$ 的单变量函数，当然均可以采用求导的方式求之．

**例 2** (1) 求函数 $f(\theta)=(1+\cos\theta)(1+\sin\theta)$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 的最大值；



(2)求函数 $g(\theta)=(\frac{1}{2}+\cos\theta)(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\theta)$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$的最大值.

**解** (1) $f(\theta)=1+\cos\theta+\sin\theta+\sin\theta\cos\theta$，令 $t=\cos\theta+\sin\theta$，$t\in(1,\sqrt{2}]$，

则 $f(\theta)=1+t+\frac{t^2-1}{2}=\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1+t)^2\leqslant\frac{(1+\sqrt{2})^2}{2}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时取等号.

所以，$f(\theta)$ 的最大值为 $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

(2) $g(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta+\cos\theta\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}+\sin(\theta+\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}\sin2\theta$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sin(\theta+\frac{\pi}{3})+\sin(\theta+\frac{\pi}{3})+\sin(\pi-2\theta)}{2}$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\cdot3\cdot\sin\frac{\theta+\frac{\pi}{3}+\theta+\frac{\pi}{3}+\pi-2\theta}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{2}\sin\frac{5\pi}{9}，$$

当且仅当 $\theta=\frac{2}{9}\pi$ 时取等号.

所以，$g(\theta)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{2}\sin\frac{5}{9}\pi$.

**注1** 求此类 $f(\theta)$ 的最大值是一个常见问题，运用的求法均为设 $t=\sin\theta\pm\cos\theta$ 进行换元，但是在 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 前的系数不一致时，此方法受阻，怎么办？我们在对 $g(\theta)=(a+\cos\theta)(b+\sin\theta)(a,b>0,a^2+b^2=1)$ 型问题采用 Jensen 不等式可谓出奇制胜.

**注2** $g(\theta)$ 最大值的另一种求法：利用含参均值不等式.

$$g(\theta)=\frac{1}{\lambda}(\lambda\cos\theta+\frac{\lambda}{2})(\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2})\quad(\lambda>0)$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\lambda\cos\theta+\sin\theta+\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right]^2\leqslant\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\sqrt{1+\lambda^2}+\frac{\lambda+\sqrt{3}}{2}}{2}\right]^2，$$

当且仅当 $\begin{cases}\lambda\cos\theta+\frac{\lambda}{2}=\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \theta+\arctan\lambda=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ 时取等号. 从中解出 $\begin{cases}\lambda=\cot\theta\\ \theta=\frac{2}{9}\pi\end{cases}$

所以 $g(\theta)\leqslant g(\frac{2}{9}\pi)=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{2}\sin\frac{5\pi}{9}$.





**例 3** 设 $f(x)=\dfrac{\sin^m x}{a}+\dfrac{b}{\sin^n x}(a,b,m,n\in\mathbf{N}^*)$，$x\in(0,\pi)$，求 $f(x)$ 的最小值.

**解** (1)当 $abn\geqslant m$ 时，

$$f(x)=\frac{\sin^m x}{a}+\frac{b}{\sin^n x}=\frac{\sin^m x}{a}+\overbrace{\left(\frac{1}{a\sin^n x}+\frac{1}{a\sin^n x}+\cdots+\frac{1}{a\sin^n x}\right)}^{ab\text{个}}$$

$$\geqslant(ab+1)\sqrt[ab+1]{\frac{\sin^m x}{a}\left(\frac{1}{a\sin^n x}\right)^{ab}}.$$

又因为 $0<\sin x\leqslant 1$，所以 $\dfrac{1}{\sin x}\geqslant 1$

又 $nab-m\geqslant 0$，得 $\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)^{nab-m}\geqslant 1$.

故 $f(x)\geqslant\dfrac{ab+1}{a}=b+\dfrac{1}{a}$，当且仅当 $\sin x=1$ 即 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时取等号.

此时 $f(x)$ 最小值为 $\dfrac{1}{a}+b$.

(2)当 $abn<m$ 时，

$$f(x)=\frac{\sin^m x}{a}+\frac{b}{\sin^n x}=\overbrace{\frac{\sin^m x}{na}+\frac{\sin^m x}{na}+\cdots+\frac{\sin^m x}{na}}^{n\text{个}}+\overbrace{\frac{b}{m\sin^n x}+\frac{b}{m\sin^n x}+\cdots+\frac{b}{m\sin^n x}}^{m\text{个}}$$

$$\geqslant(m+n)\sqrt[m+n]{\left(\frac{\sin^m x}{na}\right)^n\cdot\left(\frac{b}{m\sin^n x}\right)^m}$$

$$=(m+n)\cdot\sqrt[m+n]{\left(\frac{1}{na}\right)^n\left(\frac{b}{m}\right)^m}.$$

当且仅当 $\dfrac{\sin^m x}{na}=\dfrac{b}{m\sin^n x}$，

即 $x=\arcsin\sqrt[m+n]{\dfrac{nab}{m}}$ 时取等号.

此时 $f(x)$ 最小值为 $(m+n)\sqrt[m+n]{\left(\dfrac{1}{na}\right)^n\left(\dfrac{b}{m}\right)^m}$.

综上可知，$f(x)_{\min}=\begin{cases}\dfrac{1}{a}+b, & abn\geqslant m\\(m+n)\sqrt[m+n]{\left(\dfrac{1}{na}\right)^n\left(\dfrac{b}{m}\right)^m}, & abn<m\end{cases}$

**注** 也可以利用 $f(t)=\dfrac{t^m}{a}+\dfrac{b}{t^n}$，$t\in(0,1]$ 的单调性.

**例 4** 设 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$a,b>0$，$n\in\mathbf{N}^*$，求 $f(\theta)=\dfrac{a}{\sin^n\theta}+\dfrac{b}{\cos^n\theta}$ 的最小值.



**解法1** 利用含参均值不等式，设 $A$、$B$ 为待定的正常数，应用 $n+1$ 元均值不等式，有

$$y=\frac{a}{\sin^n\theta}+\underbrace{A\sin\theta+A\sin\theta+\cdots+A\sin\theta}_{n\text{个}}+\frac{b}{\cos^n\theta}+\underbrace{B\cos\theta+B\cos\theta+\cdots+B\cos\theta}_{n\text{个}}$$

$$-n\sqrt{A^2+B^2}\sin\left(\theta+\arctan\frac{B}{A}\right)$$

$$\geqslant(n+1)\sqrt[n+1]{aA^n}+(n+1)\sqrt[n+1]{bB^n}-n\sqrt{A^2+B^2}.$$

当且仅当 $\frac{a}{\sin^n\theta}=A\sin\theta$……①

$\frac{b}{\cos^n\theta}=B\cos\theta$……②

$\sin\left(\theta+\arctan\frac{B}{A}\right)=1$……③时取等号.

由①、②得 $\tan^{n+1}\theta=\frac{B}{A}\cdot\frac{a}{b}$……④

由③得 $\theta=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{B}{A}$，即 $\tan\theta=\frac{A}{B}$，代入④，有 $\tan^{n+2}\theta=\frac{a}{b}$，即 $\tan\theta=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n+2}}$，$\theta=\arctan\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n+2}}$. 故当 $\theta=\arctan\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n+2}}$ 时，$y$ 取最小值，此时

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{b^{\frac{1}{n+2}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}}}},\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{a^{\frac{1}{n+2}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}}}}.$$

故 $f(\theta)_{\min}=\frac{a\left(a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}}\right)^{\frac{n}{2}}}{a^{\frac{n}{n+2}}}+\frac{b\left(a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}}\right)^{\frac{n}{2}}}{b^{\frac{n}{n+2}}}=\left(a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}}\right)^{\frac{n+2}{2}}.$

**解法2** 利用 Hölder 不等式.

$$\left(\frac{a}{\sin^n\theta}+\frac{b}{\cos^n\theta}\right)^{\frac{2}{n+2}}=\left(\frac{a}{\sin^n\theta}+\frac{b}{\cos^n\theta}\right)^{\frac{2}{n+2}}\cdot(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^{\frac{n}{n+2}}$$

$$\geqslant\left(\frac{a}{\sin^n\theta}\right)^{\frac{2}{n+2}}\cdot(\sin^2\theta)^{\frac{n}{n+2}}+\left(\frac{b}{\cos^n\theta}\right)^{\frac{2}{n+2}}\cdot(\cos^2\theta)^{\frac{n}{n+2}}$$

$$=a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}}.$$

所以，$\frac{a}{\sin^n\theta}+\frac{b}{\cos^n\theta}\geqslant\left(a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}}\right)^{\frac{n+2}{2}}$.

当且仅当 $\theta=\arctan\sqrt[n+2]{\frac{a}{b}}$ 时取等号.

故 $f(\theta)_{\min}=\left(a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}}\right)^{\frac{n+2}{2}}$.

**解法3** 利用不等式，$a_i$，$b_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $(a_1^n+b_1^n)(a_2^n+b_2^n)\cdots(a_n^n+b_n^n)\geqslant(a_1a_2$





$\cdots a_n+b_1b_2\cdots b_n)^n$ 当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时取等号

则 $\left(\frac{a}{\sin^n\theta}+\frac{b}{\cos^n\theta}\right)\left(\frac{a}{\sin^n\theta}+\frac{b}{\cos^n\theta}\right)\cdot\overbrace{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\cdots(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}^{n}$

$\geq\left(\sqrt[n+2]{\frac{a}{\sin^n\theta}\cdot\frac{a}{\sin^n\theta}\cdot\underbrace{\sin^2\theta\sin^2\theta\cdots\sin^2\theta}_{n}}+\sqrt[n+2]{\frac{b}{\cos^n\theta}\cdot\frac{b}{\cos^n\theta}\cdot\underbrace{\cos^2\theta\cos^2\theta\cdots\cos^2\theta}_{n}}\right)^{n+2}$

$=(a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}})^{n+2}$.

当且仅当 $\theta=\arctan(\frac{a}{b})^{\frac{1}{n+2}}$ 时取等号

所以 $\frac{a}{\sin^n\theta}+\frac{b}{\cos^n\theta}\geq(a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}})^{\frac{n+2}{2}}$.

即 $f(\theta)_{min}=(a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}})^{\frac{n+2}{2}}$

注1 当 $n=1$ 时，我们也可以采用比较常规的方法.

方法1：$f^2(\theta)=a^2\csc^2\theta+\frac{2ab}{\sin\theta\cos\theta}+b^2\sec^2\theta$

$=a^2+b^2+a^2\cot^2\theta+b^2\tan^2\theta+\frac{2ab\cdot(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\sin\theta\cdot\cos\theta}$

$=a^2+b^2+a^2\cot^2\theta+b^2\tan^2\theta+2ab\tan\theta+2ab\cot\theta$

$=a^2+b^2+(a^2\cot^2\theta+ab\tan\theta+ab\tan\theta)+(b^2\tan^2\theta+ab\cot\theta+ab\cot\theta)$

$\geq a^2+b^2+3\cdot\sqrt[3]{a^2\cot^2\theta\cdot ab\tan\theta\cdot ab\tan\theta}+$

$3\sqrt[3]{b^2\tan^2\theta\cdot ab\cot\theta\cdot ab\cot\theta}$

$=(a^{\frac{2}{3}})^3+(b^{\frac{2}{3}})^3+3\cdot(a^{\frac{2}{3}})^2\cdot b^{\frac{2}{3}}+3\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot(b^{\frac{2}{3}})^2$

$=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^3$

所以 $f(\theta)\geq(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$，当且 $\tan\theta=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ 时取"="。

即 $f(\theta)_{min}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

方法2 利用柯西 Cauchy 不等式法

$(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\geq(a^{\frac{1}{3}}\sin\theta+b^{\frac{1}{3}}\cos\theta)^2$,

即 $(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}\geq a^{\frac{1}{3}}\sin\theta+b^{\frac{1}{3}}\cos\theta$.

所以 $(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\sin\theta}+\frac{b}{\cos\theta}\right)\geq(a^{\frac{1}{3}}\sin\theta+b^{\frac{1}{3}}\cos\theta)\left(\frac{a}{\sin\theta}+\frac{b}{\cos\theta}\right)\geq(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^2$.

即 $\frac{a}{\sin\theta}+\frac{b}{\cos\theta}\geq(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.



当且仅当 $\tan\theta=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ 时，即 $x=\arctan\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ 时取"="。

所以 $f(\theta)_{\min}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$。

对于 $n=1$ 时有如下两个几何解释。

①已知直线 $l$ 过第一象限内的定点 $p(a,b)$ 且与 $x$、$y$ 的正半轴分别交于 A、B，求 $AB_{\min}$。

②已知直线 $l$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一条切线，且与 $x$ 轴、$y$ 轴分别交于 A、B 两点，求 $AB_{\min}$。

**注 2** 利用含参的均值不等式，看似只适用于 $n\in\mathbf{N}^*$ 情形，事实上，当 $n\in\mathbf{Q}$ 时均可。如：

设 $a,b\in\mathbf{R}^+$，求 $y=\frac{a}{\sin^{3/2}\theta}+\frac{b}{\cos^{3/2}\theta}(\theta\in(0,\frac{\pi}{2}))$ 的最小值。

**解** 引入待定的正常数 $k$，使

$$y=4\cdot\frac{a}{4\sin^{3/2}\theta}+3k\sin^2\theta+4\cdot\frac{b}{4\cos^{3/2}\theta}+3k\cos^2\theta-3k$$

$$\geqslant 7\sqrt[7]{\left(\frac{a}{4\sin^{3/2}\theta}\right)^4(k\sin^2\theta)^3}+7\sqrt[7]{\left(\frac{b}{4\cos^{3/2}\theta}\right)^4(k\cos^2\theta)^3}-3k$$

$$=7\sqrt[7]{\left(\frac{a}{4}\right)^4k^3}+7\sqrt[7]{\left(\frac{b}{4}\right)^4k^3}-3k.$$

当且仅当 $\frac{a}{\sin^{3/2}\theta}=k\sin^2\theta$ 且 $\frac{b}{\cos^{3/2}\theta}=k\cos^2\theta$。

即 $\tan^{7/2}\theta=\frac{a}{b}\Leftrightarrow\tan\theta=\left(\frac{a}{b}\right)^{2/7}$，

即 $\theta=\arctan\left(\frac{a}{b}\right)^{2/7}$ 时，上式取等号。

故当 $\theta=\arctan\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{7}}$ 时，$y$ 取最小值，易求得最小值为 $(a^{\frac{4}{7}}+b^{\frac{4}{7}})^{\frac{7}{4}}$。

**注 3** 利用 Holder 不等式，直接可以将 $n$ 推广到实数，而上述的解法 3 却不可以，能改进吗？

首先给出不等式 $a_i$、$b_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$。

$\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i^n+b_i^n)\geqslant(\prod\limits_{i=1}^{n}a_i+\prod\limits_{i=1}^{n}b_i)^n$ 的一个证明。

考虑积式 $\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i^n)$ 的展开式，即





$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i^n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^n+\sum_{1\le i<j\le n}x_i^n x_j^n+\cdots+\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}x_{i_1}^n x_{i_2}^n\cdots x_{i_k}^n+\cdots+1$$

$$\geqslant n\sqrt[n]{x_1^n x_2^n\cdots x_n^n}+C_n^2\cdot\sqrt[C_n^2]{\prod_{1\le i<j\le n}x_i^n x_j^n}+\cdots$$

$$+C_n^k\cdot\sqrt[C_n^k]{\prod_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}x_{i_1}^n\cdot x_{i_2}^n\cdots x_{i_k}^n}+\cdots+1$$

$$=1+C_n^1\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i+C_n^2\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i^2+\cdots+C_n^k\prod_{i=1}^{n}x_i^k+\cdots+C_n^n\prod_{i=1}^{n}x_i^n$$

$$=\left(1+\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^n.$$

令 $x_i=\frac{a_i}{b_i}$,即可得上述不等式,并且当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$,即 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时取等号.

下面我们利用此不等式将 $n$ 推广至 Q.实际上,只需求下面几个函数的最小值(或最大值).

$f_1(x)=a\sin^n x+b\cos^n x,x\in(0,\frac{\pi}{2})(a,b>0,n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 3)$,

$f_2(x)=\frac{a}{\sqrt[n]{\sin x}}+\frac{b}{\sqrt[n]{\cos x}},x\in(0,\frac{\pi}{2})(a,b>0,n\in\mathbf{N}^*)$,

$f_3(x)=a\sqrt[n]{\sin x}+b\sqrt[n]{\cos x},x\in(0,\frac{\pi}{2}),(a,b>0,n\in\mathbf{N}^*)$.

对于 $f_1(x)$ 有,

$$(a\sin^n x+b\cos^n x)(a\sin^n x+b\cos^n x)\overbrace{\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{2}{n-2}}+\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{2}{n-2}}\right]\cdots\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{2}{n-2}}+\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{2}{n-2}}\right]}^{n-2个}$$

$$\geqslant\left[\sqrt[n]{a\sin^n x\cdot a\sin^n x\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{2}{n-2}}\cdots\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{2}{n-2}}}_{n-2个}}+\sqrt[n]{b\cos^n x\cdot b\cos^n x\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{2}{n-2}}\cdots\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{2}{n-2}}}_{n-2个}}\right]^n$$

$=1$,

所以 $a\sin^n x+b\cos^n x\geqslant(a^{\frac{2}{2-n}}+b^{\frac{2}{2-n}})^{\frac{2-n}{2}}$,

当且仅当 $x=\arctan(\frac{a}{b})^{\frac{1}{2-n}}$ 时取等号.

故 $f_1(x)_{\min}=(a^{\frac{2}{2-n}}+b^{\frac{2}{2-n}})^{\frac{2-n}{2}}$

对于 $f_2(x)$ 有

$$\overbrace{\left(\frac{a}{\sqrt[n]{\sin x}}+\frac{b}{\sqrt[n]{\cos x}}\right)\cdots\left(\frac{a}{\sqrt[n]{\sin x}}+\frac{b}{\sqrt[n]{\cos x}}\right)}^{2n个}\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)$$



$$\geqslant\left[\sqrt[2n+1]{\underbrace{\frac{a}{\sqrt[n]{\sin x}}\cdots\frac{a}{\sqrt[n]{\sin x}}}_{2n}\cdot\sin^2 x}+\sqrt[2n+1]{\underbrace{\frac{b}{\sqrt[n]{\cos x}}\cdots\frac{b}{\sqrt[n]{\cos x}}}_{2n}\cdot\cos^2 x}\right]^{2n+1}$$

$$=\left(a^{\frac{2n}{2n+1}}+b^{\frac{2n}{2n+1}}\right)^{2n+1}.$$

所以 $\frac{a}{\sqrt[n]{\sin x}}+\frac{b}{\sqrt[n]{\cos x}}\geqslant\left(a^{\frac{2n}{2n+1}}+b^{\frac{2n}{2n+1}}\right)^{\frac{2n+1}{2n}}$，当且仅当 $x=\arctan\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2n+1}}$ 时取等号.

故 $f_2(x)_{\min}=\left(a^{\frac{2n}{2n+1}}+b^{\frac{2n}{2n+1}}\right)^{\frac{2n+1}{2n}}$.

对于 $f_3(x)$ 有：

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)\cdot\left(a^{\frac{2n}{2n-1}}+b^{\frac{2n}{2n-1}}\right)\cdots\left(a^{\frac{2n}{2n-1}}+b^{\frac{2n}{2n-1}}\right)$$

$$\geqslant\left(\sqrt[2n]{\sin^2 x\cdot\underbrace{a^{\frac{2n}{2n-1}}\cdots a^{\frac{2n}{2n-1}}}_{2n-1}}+\sqrt[2n]{\cos^2 x\cdot\underbrace{b^{\frac{2n}{2n-1}}\cdots b^{\frac{2n}{2n-1}}}_{2n-1}}\right)^{2n}=\left(a\sqrt[n]{\sin x}+b\sqrt[n]{\cos x}\right)^{2n},$$

所以 $a\sqrt[n]{\sin x}+b\sqrt[n]{\cos x}\leqslant\left(a^{\frac{2n}{2n-1}}+b^{\frac{2n}{2n-1}}\right)^{\frac{2n-1}{2n}}$，当且仅当 $x=\arctan\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2n}{2n-1}}$ 时取等号

故 $f_3(x)_{\max}=\left(a^{\frac{2n}{2n-1}}+b^{\frac{2n}{2n-1}}\right)^{\frac{2n-1}{2n}}$.

**例 5** 求函数 $y=2\sin\frac{x}{2}\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)^2$，$x\in(0,\pi)$ 的最大值.

**解** 采用含参的均值不等式，设 $\lambda_1,\lambda_2>0$，则

$$y=\frac{2}{\lambda_1\lambda_2}\left[\left(\lambda_1\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\lambda_2\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$\leqslant\frac{2}{\lambda_1\lambda_2}\left[\frac{\lambda_1\sin\frac{x}{2}+\lambda_2\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)+2\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)}{4}\right]^4$$

$$=\frac{2}{\lambda_1\lambda_2}\left[\frac{(\lambda_1-\lambda_2+2)\sin\frac{x}{2}+\lambda_2+2}{4}\right]^4.$$

当且仅当 $\begin{cases}\lambda_1-\lambda_2+2=0\\ \lambda_1\sin\frac{x}{2}=\lambda_2\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)=1+\sin\frac{x}{2}\end{cases}$ 时取等号.

即 $\begin{cases}\lambda_1=\frac{1+\sqrt{17}}{2}\\ \lambda_2=\frac{5+\sqrt{17}}{2}\\ \sin\frac{x}{2}=\frac{1+\sqrt{17}}{8}\end{cases}$

这样 $y_{\max}=\frac{107+51\sqrt{17}}{256}$.





**例 6** 求函数 $f(x)=\cos 4x+6\cos 3x+17\cos 2x+30\cos x, x\in\mathbf{R}$ 的最小值

**分析** 化为关于 $\cos x$ 的"单变元"函数

**解** $f(x)=[2(2\cos^2x-1)^2-1]+6(4\cos^3x-3\cos x)+17(2\cos^2x-1)+30\cos x$

$$=8\cos^4x+24\cos^3x+26\cos^2x+12\cos x-16$$

$$=2[(4\cos^4x+4\cos^3x+\cos^2x)+(8\cos^3x+8\cos^2x+2\cos x)+(4\cos^2x+4\cos x+1)]-18$$

$$=2(\cos x+1)^2(2\cos x+1)^2-18$$

$$\geqslant -18.$$

当且仅当 $\cos x=-1$ 或 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ 时取等号.

所以, $f(x)$ 的最小值为 $-18$.

**注** 恒等变形是关键.

**例 7** 求证 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在区间 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上是单调递减函数, 并利用该结论, 证明:(1)当 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 时, $\sin x>\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}x$;

(2)当 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 时, $\sin x<\sqrt{\dfrac{2x}{\pi}}$.

**证明** 设 $0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$, 则 $x_2-x_1>0, 0<\dfrac{x_1+x_2}{2}<\dfrac{\pi}{2}$,

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{\sin x_1}{x_1}-\frac{\sin x_2}{x_2}=\frac{x_2\sin x_1-x_1\sin x_2}{x_1x_2}$$

$$=\frac{1}{x_1x_2}[(x_2\sin x_1-x_1\sin x_1)+(x_1\sin x_1-x_1\sin x_2)]$$

$$=\frac{1}{x_1x_2}[(x_2-x_1)\sin x_1-x_1(\sin x_2-\sin x_1)]$$

$$=\frac{1}{x_1x_2}[(x_2-x_1)\sin x_1-2x_1\cdot\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cos\frac{x_2+x_1}{2}]$$

$$>\frac{1}{x_1x_2}[(x_2-x_1)\cdot\sin x_1-x_1(x_2-x_1)\cdot\cos\frac{x_1+x_2}{2}]$$

$$=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}(\sin x_1-x_1\cos\frac{x_1+x_2}{2})$$

$$>\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}(\sin x_1-x_1\cos x_1)$$

$$=\frac{(x_2-x_1)\cos x_1}{x_1x_2}(\tan x_1-x_1)>0,$$



所以，$f(x_1)>f(x_2)$，即 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上是单调递减函数.

(1) 由于 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上单调递减，故 $f(x)>f(\frac{\pi}{4})\Leftrightarrow\frac{\sin x}{x}>\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\Leftrightarrow\sin x>\frac{2\sqrt{2}}{\pi}x$

(2) 由于 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减，故 $f(x)>f(\frac{\pi}{2})$，

即　$\sin x>\frac{2}{\pi}x$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

令 $t=\frac{\pi}{2}-x$，则 $t\in(0,\frac{\pi}{2})$，代入上式有 $\sin(\frac{\pi}{2}-x)>\frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2}-t)$，

即　$\cos t>1-\frac{2}{\pi}t\Leftrightarrow1-2\sin^2\frac{t}{2}>1-\frac{2}{\pi}t\Leftrightarrow\sin^2\frac{t}{2}<\frac{2}{\pi}\cdot\frac{t}{2}\Leftrightarrow\sin\frac{t}{2}<\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{t}{2}}$，

改记 $x=\frac{t}{2}$，则 $x\in(0,\frac{\pi}{4})$ 时，$\sin x<\sqrt{\frac{2x}{\pi}}$.

**注 1**　我们也可以采用求导法来证明 $f(x)$ 的单调性，事实上，$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0$

故　$f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减.

**注 2**　我们利用单位圆来解释 $f(x)$ 的单调性，如图 2-5，$\angle AOC=x_1$，$\angle BOC=x_2$，连接 $BA$ 并延长交 $x$ 轴于 $D$，则

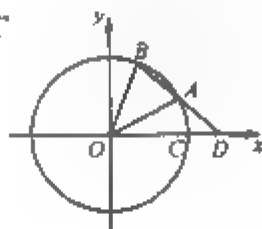


图 2-5

$S_{\triangle BOD}=\frac{1}{2}\cdot|OD|\cdot\sin x_2$，$S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}\cdot|OD|\cdot\sin x_1$，

故　$\frac{\sin x_2}{\sin x_1}=\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle AOD}}=\frac{S_{\triangle AOD}+S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOD}}=1+\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOD}}<1+\frac{S_{扇形AOB}}{S_{扇形AOC}}$

$$=1+\frac{\frac{1}{2}(x_2-x_1)}{\frac{1}{2}x_1}=\frac{x_2}{x_1}.$$

所以　$\frac{\sin x_2}{x_2}<\frac{\sin x_1}{x_1}$.

**注 3**　若令 $x\in(0,1)$，则 $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2<\frac{\sin x}{x}<\frac{\sin x^2}{x^2}$（事实上，当 $x\in(0,1)$ 时，$0<\frac{\sin x}{x}<$



$1, 0 < x^2 < x < 1$)

**注 4** 考查 $f(x)$ 的凹凸性.

由于 $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，则

$$f''(x)=\frac{(x\cos x-\sin x)'\cdot x^2-2x(x\cos x-\sin x)}{x^4}$$

$$=\frac{(\cos x-x\sin x-\cos x)x^2-2x^2\cos x+2x\sin x}{x^4}$$

$$=-\frac{x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x}{x^3}.$$

令 $g(x)=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x, x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则

$g'(x)=2x\sin x+x^2\cos x+2\cos x-2x\sin x-2\cos x=x^2\cos x>0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，所以，$g(x)>g(0)=0$

这样 $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x>0$ 对于任意 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 均成立.

故 $f''(x)<0$，即 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上是凹函数.

这样我们利用凸函数及 Jensen 不等式可以构造一大批不等式，比如，

在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证 $\frac{\sin A}{A}+\frac{\sin B}{B}+\frac{\sin C}{C}\leqslant\frac{9\sqrt{3}}{2\pi}$，等等.

**例 8** 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 $A$、$B$、$C$ 满足 $A+C=2B$，求 $\sec A+\sec C$ 的取值范围.

**解** 由 $A+C=2B$ 知 $3B=2B+B=A+C+B=\pi$，故 $B=\frac{\pi}{3}$，可设 $A=\frac{\pi}{3}+x$，$C=\frac{\pi}{3}-x$，$x\in(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ 且 $x\neq\pm\frac{\pi}{6}$.

$$\sec A+\sec C=\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3}+x)}+\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3}-x)}=\frac{\cos(\frac{\pi}{3}-x)+\cos(\frac{\pi}{3}+x)}{\cos(\frac{\pi}{3}+x)\cos(\frac{\pi}{3}-x)}$$

$$=\frac{2\cos\frac{\pi}{3}\cos x}{\cos^2\frac{\pi}{3}\cos^2 x-\sin^2\frac{\pi}{3}\sin^2 x}=\frac{4\cos x}{\cos^2 x-3\sin^2 x}=\frac{4\cos x}{4\cos^2 x-3}$$

令 $t=\cos x$，则 $t\in(\frac{1}{2},1]$，且 $t\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\sec A+\sec C=\frac{4t}{4t^2-3}=\frac{4}{4t-\frac{3}{t}}$

由于函数 $f(x)=4x-\frac{3}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 均单调递增.

故 $\sec A+\sec C$ 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup[4,+\infty)$.

**注 1** 由于 $x=\frac{A-C}{2}$,故令 $\sec A+\sec C=-2\sqrt{2}$,则可求得 $\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**注 2** 同样地,在 $\triangle ABC$ 中,当 $A+C=2B$ 时,若令 $x=\frac{A-C}{2}$,则有:

$\sec A-\sec C=\frac{4\sqrt{3}\sin x}{4\sin^2 x-1}$;$\csc A+\csc C=\frac{4\sqrt{3}\cos x}{4\cos^2 x-1}$;$\csc A-\csc C=\frac{4\sin x}{4\sin^2 x-3}$,

即也可以同样求 $\sec A-\sec C$,$\csc A+\csc C$,$\csc A-\csc C$ 的取值范围.

**例 9** 函数 $F(x)=|\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x+Ax+B|$ 在 $0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$ 上的最大值 $M$ 与 $A$、$B$ 有关,问:$A$、$B$ 取何值时 $M$ 为最小?说明你的结论.

**解** 分析:从特殊入手,对于 $A=B=0$,有

$M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi}F(x)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi}\{|\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})|\}=\sqrt{2}$.

猜测 $M_{\min}=\sqrt{2}$,只要证明对 $A$、$B$ 不同时为 0 时有:$M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi}F(x)>\sqrt{2}$.

(1)因为 $F(x)=|\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+Ax+B|$,

所以当 $A=B=0$ 时,$F(x)=|\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})|$,在区间 $[0,\frac{3}{2}\pi]$ 上有三点 $x_1=\frac{\pi}{8}$,$x_2=\frac{5}{8}\pi$,$x_3=\frac{9}{8}\pi$ 使 $F(x)$ 取到最大值 $M_0=\sqrt{2}$.

(2)下面证明 当 $A$、$B$ 不同时为 0 时,$M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi}F(x)>\sqrt{2}$.

用反证法,假设 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi}F(x)\leqslant\sqrt{2}$,则

$f(\frac{\pi}{8})\leqslant\sqrt{2}$,$f(\frac{5}{8}\pi)\leqslant\sqrt{2}$,$f(\frac{9}{8}\pi)\leqslant\sqrt{2}$,即

$$\begin{cases}-\sqrt{2}\leqslant-\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}A+B\leqslant\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}\leqslant-\sqrt{2}+\frac{5}{8}\pi A+B\leqslant\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}\leqslant-\sqrt{2}+\frac{9}{8}\pi A+B\leqslant\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\sqrt{2}\leqslant\frac{\pi}{8}A+B\leqslant0\\ 0\leqslant\frac{5}{8}\pi A+B\leqslant2\sqrt{2}\\ -2\sqrt{2}\leqslant\frac{9}{8}\pi A+B\leqslant0\end{cases}$$

由$\begin{cases}\frac{\pi}{8}A+B\leqslant0\\ \frac{5}{8}\pi A+B\geqslant0\end{cases}\Rightarrow\frac{4}{8}\pi A\geqslant0\Leftrightarrow A\geqslant0$，

由$\begin{cases}\frac{5}{8}A+B\geqslant0\\ \frac{9}{8}\pi A+B\leqslant0\end{cases}\Rightarrow\frac{4}{8}\pi A\leqslant0\Leftrightarrow A\leqslant0$，

所以 $A=0$，而 $A$、$B$ 不同时为 0，即 $B\neq0$.

所以 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\pi}F(x)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\pi}|\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+B|=\sqrt{2}+|B|>\sqrt{2}$，矛盾.

由(1)(2)可知，$M_{\min}=\sqrt{2}$，此时 $A=B=0$.

**例 10** 设 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，求证：$\left(\frac{1}{\sin^{2n}x}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^{2n}x}-1\right)\geqslant(2^n-1)^2$.

**证明** $\left(\frac{1}{\sin^{2n}x}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^{2n}x}-1\right)=(\csc^{2n}x-1)(\sec^{2n}x-1)$

$=[(1+\cot^2x)^n-1][(1+\tan^2x)^n-1]$

$=(C_n^1\cot^2x+C_n^2\cot^4x+\cdots+C_n^k\cot^{2k}x+\cdots+C_n^n\cot^{2n}x)(C_n^1\tan^2x+C_n^2\tan^4x+\cdots+$
$C_n^k\tan^{2k}x+\cdots+C_n^n\tan^{2n}x)$

$\geqslant(C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n)^2$ （利用 Cauchy 不等式）

$=(2^n-1)^2$.

故 $\left(\frac{1}{\sin^{2n}x}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^{2n}x}-1\right)\geqslant(2^n-1)^2$.

**例 11** 求证：对于任意 $x\in\mathbf{R}$，均有 $\sin^n2x+(\sin^nx-\cos^nx)^2\leqslant1$，$n\in\mathbf{N}^*$.

**证明** 原不等式$\Leftrightarrow2^n\cdot\sin^nx\cdot\cos^nx+\sin^{2n}x-2\sin^nx\cdot\cos^nx+\cos^{2n}x\leqslant1$

$\Leftrightarrow\sin^{2n}x+(2^n-2)\sin^nx\cdot\cos^nx+\cos^{2n}x\leqslant1$.

因为 $1=(\sin^2x+\cos^2x)^n=C_n^0\sin^{2n}x+C_n^1\sin^{2n-2}x\cdot\cos^2x+\cdots$
$+C_n^k\cdot\sin^{2n-2k}x\cdot\cos^{2k}x+\cdots+C_n^n\cdot\cos^{2n}x$

所以 $2=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(\sin^{2n-2k}x\cdot\cos^{2k}x+\cos^{2n-2k}x\cdot\sin^{2k}x)$



$\leqslant 2(\sin^{2n}x+\cos^{2n}x)+2\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k\sqrt{\sin^{2n-2k}x\cdot\cos^{2k}x\cdot\cos^{2n-2k}x\cdot\sin^{2k}x}$

$=2(\sin^{2n}x+\cos^{2n}x)+2\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k\cdot\sin^n x\cos^n x$

$=2(\sin^{2n}x+\cos^{2n}x)+2\sin^n x\cos^n x\cdot(2^n-2)$,

即 $\sin^{2n}x+\cos^{2n}x+(2^n-2)\sin^n x\cos^n x\leqslant 1$

故 $\sin^n 2x+(\sin^n x-\cos^n x)^2\leqslant 1$.

**注** 在例10,11中我们均采用二项式展开形式.

**例12** 求证：$|\sin\alpha_1|+|\sin\alpha_2|+\cdots+|\sin\alpha_n|+|\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)|\geqslant 1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

**证明** (1) 当 $n=1$ 时

$|\sin\alpha_1|+|\cos\alpha_1|\geqslant\sin^2\alpha_1+\cos^2\alpha_1=1$

(2) 假设当 $n=k$ 时不等式成立,则当 $n=k+1$ 时,

$|\sin\alpha_1|+|\sin\alpha_2|+\cdots+|\sin\alpha_k|+|\sin\alpha_{k+1}|+|\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\alpha_{k+1})|$

$=|\sin\alpha_1|+|\sin\alpha_2|+\cdots+|\sin\alpha_k|+|\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)|+|\sin\alpha_{k+1}|+$
$|\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\alpha_{k+1})|-|\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)|$

$\geqslant 1+|\sin\alpha_{k+1}|+|\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\alpha_{k+1})|$
$-|\cos[(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\alpha_{k+1})-\alpha_{k+1}]|$

$=1+|\sin\alpha_{k+1}|+|\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\alpha_{k+1})|-|\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\alpha_{k+1})\cos\alpha_{k+1}$
$+\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\alpha_{k+1})\sin\alpha_{k+1}|$

$\geqslant 1+|\sin\alpha_{k+1}|+|\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\alpha_{k+1})|-(|\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\alpha_{k+1})$
$\cdot\cos\alpha_{k+1}|+|\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\alpha_{k+1})|\cdot|\sin\alpha_{k+1}|)$

$\geqslant 1+|\sin\alpha_{k+1}|+|\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\alpha_{k+1})|-(|\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\alpha_{k+1})|+$
$|\sin\alpha_{k+1}|)$

$=1$.

故当 $n=k+1$ 时不等式也成立.

由(1),(2)可知,由于任意 $n\in\mathbf{N}^*$,原不等式均成立.

**注** 关键是利用 $|\cos(\alpha+\beta)|=|\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta|\leqslant|\cos\beta|+|\sin\alpha|$ 进行放缩,"熟视无睹"就是"隐藏".

**例13** 已知 $x,y,z\in\mathbf{R}$,且 $\sin x+\sin y+\sin z\geqslant\frac{3}{2}$,求证:$\sin(x-\frac{\pi}{6})+\sin(y-\frac{\pi}{6})+\sin(z-\frac{\pi}{6})\geqslant 0$.

**证明** (反证法)假设 $\sin(x-\frac{\pi}{6})+\sin(y-\frac{\pi}{6})+\sin(z-\frac{\pi}{6})<0$,则





$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y-\frac{1}{2}\cos y+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin z-\frac{1}{2}\cos z<0$，

故 $\frac{1}{2}(\cos x+\cos y+\cos z)>\frac{\sqrt{3}}{2}(\sin x+\sin y+\sin z)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

所以 $\cos x+\cos y+\cos z>\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

这样 $\sin(x+\frac{\pi}{3})+\sin(y+\frac{\pi}{3})+\sin(z+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}(\sin x+\sin y+\sin z)+\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x+\cos y+\cos z)>\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=3$.

这与 $\sin(x+\frac{\pi}{3})+\sin(y+\frac{\pi}{3})+\sin(z+\frac{\pi}{3})\leqslant 1+1+1=3$，矛盾.

所以假设错误，即有 $\sin(x-\frac{\pi}{6})+\sin(y-\frac{\pi}{6})+\sin(z-\frac{\pi}{6})\geqslant 0$.

**注** 用反证法来证明此题，妙极了！

**例 14** 设 $x_1,x_2,x_3,x_4$ 均为正数，且 $x_1+x_2+x_3+x_4=\pi$，求表达式 $(2\sin^2 x_1+\frac{1}{\sin^2 x_1})(2\sin^2 x_2+\frac{1}{\sin^2 x_2})(2\sin^2 x_3+\frac{1}{\sin^2 x_3})(2\sin^2 x_4+\frac{1}{\sin^2 x_4})$ 的最小值.

**解** 由均值不等式可得：

$2\sin^2 x_i+\frac{1}{\sin^2 x_i}=2\sin^2 x_i+\frac{1}{2\sin^2 x_i}+\frac{1}{2\sin^2 x_i}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{2\sin^2 x_i}}$，$i=1,2,3,4$.

故 $\prod_{i=1}^{4}(2\sin^2 x_i+\frac{1}{\sin^2 x_i})\geqslant 81(4\sin x_1\sin x_2\sin x_3\sin x_4)^{-\frac{2}{3}}$，

又由于 $f(x)=\ln\sin x$ 在 $x\in(0,\pi)$ 为凹函数.

故 $\sin x_1\cdot\sin x_2\cdot\sin x_3\cdot\sin x_4\leqslant\sin^4\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=\frac{1}{4}$.

从而 $\prod_{i=1}^{4}(2\sin^2 x_i+\frac{1}{\sin^2 x_i})\geqslant 81$.

又当 $x_1=x_2=x_3=x_4=\frac{\pi}{4}$ 时，$\prod_{i=1}^{4}(2\sin^2 x_i+\frac{1}{\sin^2 x_i})=81$

所以，所求表达式的最小值为 81.

在本节中，我们几乎用遍了在代数不等式求解（求证）中的各种招术，但在这里应用要灵活，希望读者能细心体会.



# §2.4 三角不等关系与最值(二)

三角形是平面几何最奇妙的对象之一,它是一个以最简洁的构图形式蕴含最丰富的内涵的图形.将三角不等关系与最值问题放入三角形中来研究,无疑是具有挑战性的.这也使它成为各级各类数学奥林匹克命题的热点素材.在这一节中我们分两部分来叙述,第一部分以常有的、常见的三角形内三角不等关系为主.第二部分的问题就要难些,将采用各式各样的方法来解决这些问题.

## §2.4.1 简单的三角形内三角不等关系与最值

我们将直接利用 Jensen 不等式、均值不等式及三角形内三角恒等式构造或证明常见、常用不等式,这些不等关系统称为简单的三角形内三角不等式.首先我们给出凸函数的概念及 Jensen 不等式.

凸函数的定义 1:设 $f(x)$ 是定义在数集 $D(D\subseteq \mathbf{R})$ 上的函数,如果对于任意 $x_1$、$x_2\in D$,有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 成立,则称 $f(x)$ 为 $D$ 上的凸函数.

**注** 凸函数的定义与以下几个定义等价.

定义 2:设 $f(x)$ 是定义在数集 $D(D\subseteq \mathbf{R})$ 上的函数,如果对于任意 $x_1$、$x_2\in D$,$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$,其中 $\lambda_1+\lambda_2=1(\lambda_1,\lambda_2>0)$,则称 $f(x)$ 为 $D$ 上的凸函数.

定义 3 设 $f(x)$ 是定义在数集 $D(D\subseteq R)$ 上的函数,且 $f(x)$ 二阶可导,如果 $f''(x)>0$,对任意 $x\in D$ 均成立,那么 $f(x)$ 是数集 $D$ 上的凸函数

Jensen 不等式 如果 $f(x)$ 是数集 $D$ 上的凸函数,那么对于任意 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in D$,均有 $f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$,

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取"="

加权 Jensen 不等式 如果 $f(x)$ 是数集 $D$ 上的凸函数,那么对于任意 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in D$ 均有 $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\cdots+\lambda_nf(x_n)$,其中 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n>0)$,当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取"=".

对于 Jensen 不等式及加权 Jensen 不等式的证明,这里从略.下面我们就用 Jensen 不等式、均值不等式及三角形内三角恒等式来构造、证明简单的三角形内的三角不等式.





(1)在$\triangle ABC$中,$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

由于$y=\sin x, x\in(0,\pi)$为凸函数,这样由 Jensen 不等式即可得.

(2)在$\triangle ABC$中,$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{2}$

由于$y=-\sin x, x\in(0,\pi)$为凸函数.

(3)在$\triangle ABC$中,$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{3}$

由于$y=-\cos x, x\in(0,\frac{\pi}{2})$为凸函数

(4)在$\triangle ABC$中,$\sin A\sin B\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

由于$\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\leqslant\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)^3\leqslant\left[\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{3}\right]^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

(5)在$\triangle ABC$中,$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$.

由于$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\left(\frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{3}\right)^3\leqslant\left[\frac{\frac{3}{2}}{3}\right]^3=\frac{1}{8}$

(6)在$\triangle ABC$中,$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$

方法1:$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leqslant\left[\frac{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}{3}\right]^3\leqslant\left[\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{3}\right]^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

方法2:由于$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$,

故$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{4}(\sin A+\sin B+\sin C)\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$

(7)在$\triangle ABC$中,$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$.

方法1:$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant 1+4\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

方法2,$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$.

下证:$R\geqslant 2r$

方法①:由 Euler 公式可知:



$OI^2=R^2-2Rr$(其中 $O$、$I$ 分别为$\triangle ABC$的外心与内心),

则 $R^2-2Rr\geqslant 0$,即 $R\geqslant 2r$.

方法②,如图 2-6,设 $O$ 为$\triangle ABC$的外心,$O$ 到对边的距离为 $d_a$,则 $h_a\leqslant R+d_a$,同理有 $h_b\leqslant R+d_b$,$h_c\leqslant R+d_c$.

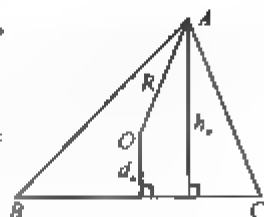



图 2-6

所以:$\frac{1}{2}ah_a\leqslant\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}a\cdot d_a$,$\frac{1}{2}bh_b\leqslant\frac{1}{2}bR+\frac{1}{2}b\cdot d_b$,$\frac{1}{2}ch_c\leqslant\frac{1}{2}cR+\frac{1}{2}c\cdot d_c$,

三式相加得,$3S_{\triangle ABC}\leqslant\frac{R}{2}(a+b+c)+S_{\triangle ABC}\Leftrightarrow 2S_{\triangle ABC}\leqslant\frac{R}{2}(a+b+c)\Leftrightarrow 2\cdot\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r\leqslant\frac{R}{2}(a+b+c)\Leftrightarrow R\geqslant 2r$.

这样,$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}\leqslant 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

方法 3:1)当 $A$、$B$、$C\in(0,\frac{\pi}{2}]$时,由于 $y=\cos x$,$x\in(0,\frac{\pi}{2}]$为凸函数,

所以,$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant 3\cos\frac{A+B+C}{3}=\frac{3}{2}$

2)当 $A$、$B$、$C$ 中有一个钝角时,不妨设 $C>\frac{\pi}{2}$,则 $0<A,B<\frac{\pi}{2}$,

$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant 2\cos\frac{A+B}{2}+\cos C=2\sin\frac{C}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$

$=\frac{3}{2}-\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{3}{2}$.

综上可知:$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$

(8)在$\triangle ABC$中,$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\geqslant\frac{3}{4}$.

由于 $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}[3-(\cos A+\cos B+\cos C)]\geqslant\frac{1}{2}\left(3-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}$

(9)在$\triangle ABC$中,$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\leqslant\frac{9}{4}$.

方法 1:$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)\leqslant\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$.

方法 2:$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=3-\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)\leqslant 3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$

(10)在$\triangle ABC$中,$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C\geqslant\frac{3}{4}$.

由于 $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\cos A\cos B\cos C\geqslant 1-2\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$.

(11)在$\triangle ABC$中，$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\leqslant\frac{9}{4}$.

由于 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2+2\cos A\cos B\cos C\leqslant 2+2\times\frac{1}{8}=\frac{9}{4}$.

(12)在$\triangle ABC$中，$\sin2A+\sin2B+\sin2C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

由于 $\sin2A+\sin2B+\sin2C=4\sin A\sin B\sin C\leqslant 4\times\frac{3\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(13)在$\triangle ABC$中，$\cos2A+\cos2B+\cos2C\geqslant-\frac{3}{2}$.

由于 $\cos2A+\cos2B+\cos2C=2(\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C)-3\geqslant 2\times\frac{3}{4}-3=-\frac{3}{2}$.

(14)在锐角$\triangle ABC$中，$\tan A+\tan B+\tan C\geqslant 3\sqrt{3}$.

方法1：由于 $y=\tan x, x\in(0,\frac{\pi}{2})$为凸函数.

方法2：由于 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C\leqslant\left(\frac{\tan A+\tan B+\tan C}{3}\right)^3$，

故 $\tan A+\tan B+\tan C\geqslant 3\sqrt{3}$.

(15)在锐角$\triangle ABC$中，$\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C\geqslant 3\sqrt{3}$.

方法1：$\tan A\tan B\tan C\leqslant\left(\frac{\tan A+\tan B+\tan C}{3}\right)^3=\left(\frac{3\sqrt{3}}{3}\right)^3=3\sqrt{3}$.

方法2：$\tan A\tan B\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C\geqslant 3\sqrt{3}$.

(16)在锐角$\triangle ABC$中，$\cot A+\cot B+\cot C\geqslant\sqrt{3}$.

由于 $y=\cot x, x\in(0,\frac{\pi}{2})$为凸函数.

(17)在锐角$\triangle ABC$中，$\cot A\cdot\cot B\cdot\cot C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{9}$.

由于 $\cot A\cdot\cot B\cdot\cot C=\frac{1}{\tan A\tan B\tan C}$.

(18)在$\triangle ABC$中，$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3}$.

由于 $y=\tan x, x\in(0,\frac{\pi}{2})$为凸函数.



(19)在$\triangle ABC$中，$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{9}$，

由于$1=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\geqslant 3\sqrt[3]{\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}}$，

故$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{9}$.

(20)在$\triangle ABC$中，$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geqslant 3\sqrt{3}$，

由于$y=\cot x, x\in(0,\frac{\pi}{2})$为凸函数

(21)在$\triangle ABC$中，$\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}\geqslant 3\sqrt{3}$，

由于$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}$.

(22)在$\triangle ABC$中，$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geqslant 1$.

方法1：$\tan^2A+\tan^2B+\tan^2C\geqslant\frac{\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{A}{2}\right)^2}{3}\geqslant\frac{(\sqrt{3})^2}{3}=1$

方法2：$\tan^2A+\tan^2B+\tan^2C\geqslant\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$.

(23)在$\triangle ABC$中，$\cot^2A+\cot^2B+\cot^2C\geqslant 1$.

方法1 $\cot^2A+\cot^2B+\cot C\geqslant\frac{(\cot A+\cot B+\cot C)^2}{3}\geqslant\frac{(\sqrt{3})^2}{3}=1$.

方法2：$\cot^2A+\cot^2B+\cot^2C\geqslant\cot A\cot B-\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$

(24)在锐角$\triangle ABC$中，$\tan^2A+\tan^2B+\tan^2C\geqslant 9$，

由于$\tan^2A+\tan^2B+\tan^2C\geqslant\frac{(\tan A+\tan B+\tan C)^2}{3}\geqslant\frac{(3\sqrt{3})^2}{3}=9$.

(25)在$\triangle ABC$中，$\cot^2\frac{A}{2}+\cot^2\frac{B}{2}+\cot^2\frac{C}{2}\geqslant 9$，

由于$\cot^2\frac{A}{2}+\cot^2\frac{B}{2}+\cot^2\frac{C}{2}\geqslant\frac{\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)^2}{3}\geqslant\frac{(3\sqrt{3})^2}{3}=9$.

另外，以上25个三角形内的三角不等式，当且仅当$A=B=C=\frac{\pi}{3}$时等号成立，即$\triangle ABC$为正三角形时取到 因此也可以将上述证明不等式改为求最大值或最小值型问题





### §2.4.2 进一步的三角形内三角不等关系与最值

在这一部分中，我们除了应用上一部分的方法与结论之外，还会用到调整法、反证法及代数运算等各种方式来解决问题。

**例1** 在锐角$\triangle ABC$中，求证：$\sin A+\sin B+\sin C+\tan A+\tan B+\tan C>2\pi$.

**分析** 采用各个击破法，看看是否有 $\sin A+\tan A>2A$?

**证明1** $\sin A+\tan A=\dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}+\dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}=\dfrac{4\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^4\frac{A}{2}}>4\tan\dfrac{A}{2}$,

又因为 $0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{4}$，所以 $\tan\frac{A}{2}>\frac{A}{2}$，故 $\sin A+\tan A>4\tan\frac{A}{2}>4\times\frac{A}{2}=2A$.

同理，$\sin B+\tan B>2B$, $\sin C+\tan C>2C$,

三式相加，即有 $\sin A+\sin B+\sin C+\tan A+\tan B+\tan C>2\pi$.

几乎所有的参考书均采用上述做法，这里我们再给出一些其他做法。

**证明2** 令 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2\geqslant 2\sqrt{\cos x\cdot\sec^2 x}-2=\frac{2}{\sqrt{\cos x}}-2\geqslant 2-2=0.$$

故 $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，所以 $f(x)>f(0)=0$.

这样 $\sin x+\tan x>2x$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

以下同证明1.

**证明3** 由证法1可知，$\sin A+\tan A>4\tan\frac{A}{2}$，则同理有

$\sin B+\tan B>4\tan\frac{B}{2}$, $\sin C+\tan C>4\tan\frac{C}{2}$.

累加得 $\sin A+\sin B+\sin C+\tan A+\tan B+\tan C>4\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)$

$$\geqslant 4\cdot 3\tan\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3}=4\sqrt{3}>2\pi$$ （见§2.4.1中(18)）.

**证明4** 由于 $\sin A+\sin B+\sin C>2$, $\tan A+\tan B+\tan C\geqslant 3\sqrt{3}$（见§1.4.2例5及§2.4.1中(14)），

故 $\sin A+\sin B+\sin C+\tan A+\tan B+\tan C>2+3\sqrt{3}>2\pi$.



**例 2** 在§2.4.1中我们利用Jensen不等式及均值不等式推导并证明了以下不等式，在$\triangle ABC$中，$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$，在这里我们再利用其他方式来证明它，别有一番风味.

**证明 1** $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}$$

$$\leqslant\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

当且仅当$A=B=C=\frac{\pi}{3}$时取等号.

**证明 2** 由证明1可知，$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=-\frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$\leqslant-\frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{C}{2}=-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\leqslant\frac{1}{8}$$

当且仅当$A=B=C=\frac{\pi}{3}$时取等号.

**证明 3** 令$f(A,B,C)=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

由于不等式关于$A$、$B$、$C$完全对称，故不妨设$A\leqslant C\leqslant B$.

$$f(A,B,C)\leqslant f\left(\frac{\pi}{3},A+B-\frac{\pi}{3},C\right)$$

$$\Leftrightarrow\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\leqslant\sin\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\left[\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right]\leqslant-\frac{1}{2}\left[\cos\frac{A+B}{2}-\cos\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow\cos\frac{A-B}{2}-\cos\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow-2\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{B}{2}\right)\leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 0$$





$\Leftrightarrow(A-\frac{\pi}{3})(B-\frac{\pi}{3})\leqslant 0$.

由 $A\leqslant C\leqslant B$ 可知上式成立

因为，$\frac{\pi}{3}$ 介于 $A+B-\frac{\pi}{3}$ 与 $C$ 之间.

所以，$f(\frac{\pi}{3},A+B-\frac{\pi}{3},C)\leqslant f(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},A+B+C-\frac{\pi}{3})=f(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})=\frac{1}{8}$.

故 $f(A,B,C)\leqslant\frac{1}{8}$，即 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$

三角形内的不等式大多结构对称，形式优美，如果及时对它们进行排序，有时会有一些意想不到的效果

**例 3** 在$\triangle ABC$中，求证：$\sin(A-30^\circ)+\sin(B-30^\circ)+\sin(C-30^\circ)\leqslant\frac{3}{2}$.

**证明** 不妨设 内角 $A$、$B$、$C$ 中 $C$ 最小，则 $0^\circ<C\leqslant 60^\circ$.

故 $\sin\frac{120^\circ-C}{2}>0$，于是

$\sin(A-30^\circ)+\sin(B-30^\circ)+\sin(C-30^\circ)$

$=2\sin\frac{A+B-60^\circ}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin(C-30^\circ)+\sin30^\circ-\frac{1}{2}$

$=2\sin\frac{120^\circ-C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C-60^\circ}{2}-\frac{1}{2}$

$\leqslant 2\sin\frac{120^\circ-C}{2}+2\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}$

$=4\sin30^\circ\cos\frac{60^\circ-C}{2}-\frac{1}{2}\leqslant 4\sin30^\circ-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

当且仅当 $A=B=C=60^\circ$，即$\triangle ABC$为正三角形时取等号.

**例 4** 在$\triangle ABC$中，求证：$\sin\frac{3A}{2}+\sin\frac{3B}{2}+\sin\frac{3C}{2}\leqslant\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{C-A}{2}$

**证明** 令 $\alpha=\frac{A}{2}$，$\beta=\frac{B}{2}$，$\gamma=\frac{C}{2}$，则 $\alpha$、$\beta$、$\gamma\in(0,\frac{\pi}{2})$ 且 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$.

$\sin\frac{3A}{2}-\cos\frac{B-C}{2}=\sin3\alpha-\cos(\beta-\gamma)=\sin3\alpha-\sin(\alpha+2\gamma)$

$=2\cos(2\alpha+\gamma)\sin(\alpha-\gamma)=-2\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)$.

同理可得，$\sin\frac{3B}{2}-\cos\frac{C-A}{2}=-2\sin(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)$，



$$\sin\frac{3C}{2}\cos\frac{A-B}{2}=2\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta).$$

这样，原不等式$\Leftrightarrow\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)\geqslant 0$。

由于不等式关于$\alpha$、$\beta$、$\gamma$完全对称，不妨设$0<\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma<\frac{\pi}{2}$，则

$\sin(\gamma-\alpha)-\sin(\beta-\alpha)\geqslant 0$。

所以，$\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)$

$=\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\gamma-\beta)[\sin(\gamma-\alpha)-\sin(\beta-\alpha)]\geqslant 0$

故原不等式成立.

**注** 在证明$\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)\geqslant 0$时，所用的方法与证明Schur不等式类似.

**例5** 在$\triangle ABC$中，求证：$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$，并指出何时取等号.

**证明** 由于不等式关于$A$、$B$、$C$完全对称，不妨设$A\leqslant B\leqslant C$，则$A+B\leqslant 120^\circ$，$C\geqslant 60^\circ$，$0<\frac{3(A+B)}{2}<180^\circ$，而$0<B<\frac{\pi}{2}$，这样又有$-\frac{3}{4}\pi<\frac{3A-3B}{2}<0$。

又令$\theta=\frac{3A+3B}{2}$，则$0<\theta<\pi$.

$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=2\sin\frac{3A+3B}{2}\cos\frac{3A-3B}{2}+\sin 3(A+B)$

$$=2\sin\frac{3A+3B}{2}\left(\cos\frac{3A-3B}{2}+\cos\frac{3A+3B}{2}\right)$$

$$\leqslant 2\sin\frac{3A+3B}{2}\left(1+\cos\frac{3A+3B}{2}\right)$$

$$=2\sin\theta(1+\cos\theta)=8\sin\frac{\theta}{2}\cos^3\frac{\theta}{2}$$

$$=8\sqrt{3\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\leqslant\frac{8}{\sqrt{3}}\left(\frac{3\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}{4}\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

当且仅当$\begin{cases}\cos\frac{3A-3B}{2}=1\\ \cos^2\frac{\theta}{2}=3\sin^2\frac{\theta}{2}\end{cases}$时，即$A=B=20^\circ$，$C=140^\circ$时取等号

故 $\sin3A+\sin3B+\sin3C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$，并且当三内角分别为 20°、20°、140°时取等号.

**注 1** 千万不要以为：有 Jensen 不等式解 $\sin nA+\sin nB+\sin nC$ 型不等式就难不倒你了．不信，请你试一试本题！

**注 2** 如果你用 Jensen 不等式没有证出，请参考下面一个采用 Jensen 不等式的证法.

由于不等式关于 $A$、$B$、$C$ 完全对称，不妨设 $C\leqslant B\leqslant A$.

(1) 当 $\frac{\pi}{3}\leqslant A\leqslant\frac{2}{3}\pi$ 时，$\pi\leqslant3A\leqslant2\pi$，此时 $\sin3A\leqslant0$.

所以，$\sin3A+\sin3B+\sin3C\leqslant\sin3B+\sin3C\leqslant2<\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(2) 当 $A>\frac{2}{3}\pi$ 时，令 $A=A_0+\frac{2}{3}\pi$，则 $\sin3A=\sin3A_0$，$3A_0+3B+3C=\pi$，且 $0<3A_0$、$3B$、$3C<\pi$，即 $3A_0$、$3B$、$3C$ 恰好构成某三角形的三内角，这样，由 Jensen 不等式可得，

$\sin3A_0+\sin3B+\sin3C\leqslant3\sin\frac{3A_0+3B+3C}{3}=3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

当且仅当 $A_0=B=C=20°$，此时 $A=140°$ 时取等号.

综上所述，$\sin3A+\sin3B+\sin3C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$，并且当三内角分别为 20°、20°、140°时取等号.

**例 6** 在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：$\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A\leqslant\frac{1}{2}+2\cos A\cos B\cos C$.

**分析** 由于 $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\cos A\cos B\cos C$，

故不等式$\Leftrightarrow\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A+\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C\leqslant\frac{3}{2}$.

而 $\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A\leqslant\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C$，我们只需证明：

$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C\leqslant\frac{3}{4}$.

但由 §2.4.1 知 $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C\geqslant\frac{3}{4}$，失败！

另寻道路，利用锐角三角形的特点，进行放缩.

**证明** 由于不等式关于 $A$、$B$、$C$ 完全对称，不妨设 $C\leqslant B\leqslant A$，则 $\frac{\pi}{3}\leqslant A<\frac{\pi}{2}$，故 $\cos A\in(0,\frac{1}{2}]$.



$\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A-2\cos A\cos B\cos C$

$=\cos A(\cos B+\cos C)+\cos B\cos C(1-2\cos A)$

$=2\cos A\cos\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}+\dfrac{1}{2}[\cos(B+C)+\cos(B-C)](1-2\cos A)$

$\leqslant 2\cos A\sin\dfrac{A}{2}+\dfrac{1}{2}(1-\cos A)(1-2\cos A)=2\cos A\sin\dfrac{A}{2}+\dfrac{1}{2}(1-3\cos A+2\cos^2 A)$

$=\dfrac{1}{2}+\cos A\left(-2\sin^2\dfrac{A}{2}+2\sin\dfrac{A}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-2\cos A\left(\sin^2\dfrac{A}{2}-\sin\dfrac{A}{2}+\dfrac{1}{4}\right)$

$=\dfrac{1}{2}-2\cos A\left(\sin\dfrac{A}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{1}{2}$,

即 $\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A\leqslant\dfrac{1}{2}+2\cos A\cos B\cos C$.

**例 7** 设 $a$、$b$、$c$ 为 $\triangle ABC$ 的三条边，$a\leqslant b\leqslant c$，$R$ 和 $r$ 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆和内切圆半径，令 $f=a+b-2R-2r$，试用 $\angle C$ 的大小来判定 $f$ 的符号.

**解** 因为在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$c=2R$，$r=\dfrac{a+b-c}{2}$，此时 $f=0$.

猜想：$0<C<\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow f>0$；

$C=\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow f=0$；

$\dfrac{\pi}{2}<C<\pi\Leftrightarrow f<0$.

因为 $\dfrac{r}{R}=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$，

$f=2R\sin A+2R\sin B-2R-4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

$=2R\left[2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}-1+2\left(\cos\dfrac{A+B}{2}-\cos\dfrac{A-B}{2}\right)\sin\dfrac{C}{2}\right]$

$=4R\cos\dfrac{A-B}{2}\left(\sin\dfrac{A+B}{2}-\sin\dfrac{C}{2}\right)+4R\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{C}{2}-2R$

$=4R\cos\dfrac{A-B}{2}\left(\cos\dfrac{C}{2}-\sin\dfrac{C}{2}\right)+2R\left(2\sin^2\dfrac{C}{2}-1\right)$

$=4R\cos\dfrac{A-B}{2}\left(\cos\dfrac{C}{2}-\sin\dfrac{C}{2}\right)-2R\left(\cos^2\dfrac{C}{2}-\sin^2\dfrac{C}{2}\right)$

$=2R\left(\cos\dfrac{C}{2}-\sin\dfrac{C}{2}\right)\left(2\cos\dfrac{B-A}{2}-\cos\dfrac{C}{2}-\sin\dfrac{C}{2}\right)$

由 $A\leqslant B\leqslant C$，得 $0\leqslant B-A<B\leqslant C$，





所以 $0\leqslant\frac{B-A}{2}<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\cos\frac{B-A}{2}>\cos\frac{C}{2}$.

又因为 $0\leqslant B-A\leqslant B+A<\pi$，所以 $0\leqslant\frac{B-A}{2}<\frac{B+A}{2}<\frac{\pi}{2}$，

即 $\cos\frac{B-A}{2}>\cos\frac{B+A}{2}=\sin\frac{C}{2}$，

即 $2\cos\frac{B-A}{2}-\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}>0$.

所以 $f>0\Leftrightarrow\cos\frac{C}{2}>\sin\frac{C}{2}\Leftrightarrow0<C<\frac{\pi}{2}$，

$f=0\Leftrightarrow\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{C}{2}\Leftrightarrow C=\frac{\pi}{2}$，

$f<0\Leftrightarrow\cos\frac{C}{2}<\sin\frac{C}{2}\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}<C<\pi$.

**例 8** 在$\triangle ABC$中，$\angle C\geqslant60^\circ$，求证：$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant4+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$.

**证明** $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=(\sin A+\sin B)\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$

$$=4+\frac{(\sin A-\sin B)^2}{\sin A\sin B}+\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}$$

$$=4+\frac{8\cos^2\frac{A+B}{2}\cdot\sin^2\frac{A-B}{2}}{\cos(A-B)-\cos(A+B)}+\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}}{\sin C}$$

$$=4+\frac{8\sin^2\frac{C}{2}\cdot\sin^2\frac{A-B}{2}}{\cos(A-B)+\cos C}+\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$=4+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}+\frac{8\sin^2\frac{C}{2}\cdot\sin^2\frac{A-B}{2}}{\cos(A-B)+\cos C}-\frac{2\sin^2\frac{A-B}{4}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$=4+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}+2\sin^2\frac{A-B}{4}\cdot\left[\frac{8\sin^2\frac{C}{2}\cdot\cos^2\frac{A-B}{4}}{\cos^2\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}}-\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right],$$



故只需证，$\frac{8\sin^2\frac{C}{2}\cdot\cos^2\frac{A-B}{4}}{\cos^2\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}}\geqslant\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$.

因为 $\cos^2\frac{A-B}{2}\geqslant\cos^2\frac{A+B}{2}=\sin^2\frac{C}{2}$.

所以只需证：$8\sin^3\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\geqslant\cos^2\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}$.

又因为 $C\geqslant60^\circ$，所以 $\sin\frac{C}{2}\geqslant\frac{1}{2}$，$8\sin^3\frac{C}{2}\geqslant1$.

所以 $8\sin^3\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{4}\geqslant\cos^2\frac{A-B}{4}\geqslant\cos^2\frac{A-B}{2}\geqslant\cos^2\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}$.

故原命题得证.

在对三角形内三角不等式证明时，不能忘记其不等式的特点以及对均值不等式、柯西不等式等常用不等式的灵活运用，熟练掌握这几个重要不等式，解题时常会有事半功倍的效果.

**例9** 在△ABC中，求证：$\cos A(\sin B+\sin C)\geqslant-\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

**证明** (1)当 $0<A\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos A\geqslant0$，$\sin B+\sin C>0$，故原不等式成立.

(2)当 $\frac{\pi}{2}<A<\pi$ 时，$\cos A<0$，当然，$1-2\cos^2\frac{A}{2}=-\cos A>0$.

$(\sin B+\sin C)\cos A=\cos A\cdot2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\geqslant\cos A\cdot2\cos\frac{A}{2}$

$=-2\sqrt{(1-2\cos^2\frac{A}{2})^2\cos^2\frac{A}{2}}$

$=-\sqrt{(1-2\cos^2\frac{A}{2})(1-2\cos^2\frac{A}{2})\cdot4\cos^2\frac{A}{2}}$

$\geqslant-\sqrt{\left[\frac{(1-2\cos^2\frac{A}{2})+(1-2\cos^2\frac{A}{2})+4\cos^2\frac{A}{2}}{3}\right]^3}$

$=-\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

当且仅当 $B=C=\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3}$ 时取等号.

综上可知，$\cos A(\sin B+\sin C)\geqslant-\frac{2\sqrt{6}}{9}$.





**注** 在(2)中还可以这样证明：

$$2\cos A\cos\frac{A}{2}=-2\sqrt{\cos^2\frac{A}{2}\cdot\cos^2 A}=-2\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}\cdot\cos^2 A}$$

$$=-\sqrt{2(1+\cos A)(-\cos A)(-\cos A)}$$

$$\geqslant-\sqrt{\left(\frac{2+2\cos A-\cos A-\cos A}{3}\right)^3}$$

$$=-\frac{2\sqrt{6}}{9}.$$

**例 10** 在锐角$\triangle ABC$中，求证：$\sec A+\sec B+\sec C\geqslant\csc\frac{A}{2}+\csc\frac{B}{2}+\csc\frac{C}{2}$.

**证明** 由于$\sec A$、$\sec B$、$\sec C>0$，故$\sec A+\sec B\geqslant2\sqrt{\sec A\sec B}=\frac{2}{\sqrt{\cos A\cdot\cos B}}=$

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{\cos(A+B)+\cos(A-B)}{2}}}\geqslant\frac{2}{\sqrt{\frac{1-\cos C}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{\sin^2\frac{C}{2}}}=2\csc\frac{C}{2}.$$

同理，$\sec B+\sec C\geqslant2\csc\frac{A}{2}$，$\sec C+\sec A\geqslant2\csc\frac{B}{2}$.

三式相加得：$\sec A+\sec B+\sec C\geqslant\csc\frac{A}{2}+\csc\frac{B}{2}+\csc\frac{C}{2}$

**注 1** 我们可以将此不等式在系数与指数方面作一个推广，即在锐角$\triangle ABC$中，对于任意正数$\lambda_1$、$\lambda_2$、$\lambda_3$、$p$，均有：

$$\lambda_1\sec^p A+\lambda_2\sec^p B+\lambda_3\sec^p C\geqslant\sqrt{\lambda_2\lambda_3}\csc^p\frac{A}{2}+\sqrt{\lambda_3\lambda_1}\csc^p\frac{B}{2}+\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\csc^p\frac{C}{2}.$$

事实上，由$\lambda_1\sec^p A+\lambda_2\sec^p B\geqslant2\sqrt{\lambda_1\lambda_2\sec^p A\sec^p B}$，及$\sec A\cdot\sec B\geqslant\csc^2\frac{C}{2}$，

即得 $\lambda_1\sec^p A+\lambda_2\sec^p B\geqslant2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\csc^p\frac{C}{2}$.

同理可得：$\lambda_2\sec^p B+\lambda_3\sec^p C\geqslant2\sqrt{\lambda_2\lambda_3}\csc^p\frac{A}{2}$，

$\lambda_3\sec^p C+\lambda_1\sec^p A\geqslant2\sqrt{\lambda_3\lambda_1}\csc^p\frac{B}{2}$.

三式相加即证明了推广形式.

**注 2** 根据上述做法，寻求化为边的做法：

$$\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\geqslant\frac{2}{\sin\frac{A}{2}}\Leftrightarrow\frac{1}{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}+\frac{1}{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{(p-b)(p-c)}}\cdots\cdots①$$



**证明** 左边 $\geqslant \dfrac{2}{\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}=\dfrac{8abc}{b(a^2+c^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)}$

$$=\frac{8abc}{a^2(b+c)+bc(b+c)-(b+c)(b^2+c^2-cb)}=\frac{8abc}{(b+c)[a^2-(b-c)^2]}$$

$$=\frac{8abc}{(b+c)(a-b+c)(a+b-c)}=\frac{8abc}{(b+c)((2p-2b)(2p-2c))}$$

$$=\frac{2abc}{(b+c)(p-b)(p-c)}.$$

要使①式成立，只需证：$\dfrac{2abc}{(b+c)(p-b)(p-c)}\geqslant\dfrac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{(p-b)(p-c)}}$

$\Leftrightarrow a\cdot\sqrt{bc}\geqslant(b+c)\sqrt{(p-b)(p-c)}$ ……②

令 $\begin{cases}a=x+y\\ b=y+z\\ c=z+x\end{cases}$，$x,y,z>0$，则 $p-b=x$，$p-c=y$.

② $\Leftrightarrow (x+y)\cdot\sqrt{(y+z)(z+x)}\geqslant(y+z+z+x)\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow (x+y)^2(y+z)\cdot(z+x)\geqslant[(y+z)^2+(z+x)^2+2(y+z)(z+x)]\cdot xy$

$\Leftrightarrow x^2(y+z)(z+x)+y^2(y+z)\cdot(z+x)\geqslant xy\cdot(y+z)^2+xy(z+x)^2$

$\Leftrightarrow x(z+x)[x(y+z)-y(z+x)]+y(y+z)[y(z+x)-x(y+z)]\geqslant0$

$\Leftrightarrow xz(x+z)(x-y)+yz(y+z)(y-x)\geqslant0$

$\Leftrightarrow (x-y)z[x(x+z)-y(y+z)]\geqslant0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2z\cdot(x+y+z)\geqslant0.$

**注3** 若由 $\dfrac{2ac}{a^2+c^2-b^2}+\dfrac{2ab}{a^2+b^2-c^2}\geqslant\dfrac{2a(\sqrt{c}+\sqrt{b})^2}{(a^2+c^2-b^2)+(a^2+b^2-c^2)}=\dfrac{(\sqrt{c}+\sqrt{b})^2}{a}$，

想证明：$\dfrac{(\sqrt{c}+\sqrt{b})^2}{a}\geqslant\dfrac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{(p-b)(p-c)}}$，这是不可能的.

事实上，取 $a=10^{3n}$，$b=10^{2n}$，$c=1$

则可知：左端 $\to0$，右端 $\to+\infty$ 矛盾.

**例11** 已知△$ABC$ 中，外接圆半径与内切圆半径分别为 $R$、$r$，求证：

$$R\geqslant\frac{r}{2\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)}$$

**证明** 由于 $BC=r\cot\dfrac{B}{2}+r\cot\dfrac{C}{2}=r\dfrac{\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$





$$=r\cdot\frac{\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=r\cdot\frac{\sin\frac{\pi-A}{2}}{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)}=\frac{2r\cdot\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}}\geqslant\frac{2r\cos\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2r\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)}=\frac{r\sin A}{\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)}$$，而 $BC=2R\sin A$.

故 $2R\sin A\geqslant\frac{r\sin A}{\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)}$，即 $R\geqslant\frac{r}{2\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)}$，

当且仅当 $B=C$ 时取等号.

**注 1** 由于 $\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\leqslant\left[\frac{\sin\frac{A}{2}+\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}$，当且仅当 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$ 即 $A=\frac{\pi}{3}$ 时取等号，故 $R\geqslant\frac{r}{2\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)}\geqslant 2r$，当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时取等号.

这是对不等式 $R\geqslant 2r$ 的一个加强.

**注 2** 若取 $A=\frac{\pi}{2}$，即可得：在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，有 $R\geqslant(1+\sqrt{2})r$.

**例 12** 在 $\triangle ABC$ 中，求证 $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{8}(\csc A+\csc B+\csc C)$.

**证明** $\frac{\sqrt{3}}{8}(\csc A+\csc B+\csc C)+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$\geqslant 4\sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^3\times 2\times\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}\cdot\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\sqrt[4]{(\sqrt{3})^3\times\frac{1}{2^3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}}\geqslant\sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}}=1.$$

$\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leqslant\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right)$

故 $\frac{\sqrt{3}}{8}(\csc A+\csc B+\csc C)\geqslant 1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}$

这样原不等式成立.

**注** 三角恒等式 $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ 起了很大的作用.



**例 13** 在$\triangle ABC$中,求证:$\sin A\cdot\sin\frac{A}{2}+\sin B\cdot\sin\frac{B}{2}+\sin C\cdot\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$

**证明** 只需证 $\sin A\cdot\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}$

事实上,$\sin A\cdot\sin\frac{A}{2}=2\sin^2\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{A}{2}\cdot 2\cos^2\frac{A}{2}}$

$\leqslant\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}+2\cos^2\frac{A}{2}}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

$=\frac{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$

所以 $\sin A\cdot\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

**例 14** 已知$\triangle ABC$为锐角三角形,求证:$\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2+8\cos A\cos B\cos C\geqslant 4$

**证明** 利用我们熟知的三角形内的恒等式可知:

$1-2\cos A\cos B\cos C=\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C$,

这样,只需证明$\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2\geqslant 4(\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C)$,

而 $2\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{\cos^4A}{\cos^2B\cos^2C}}=\frac{3\cos^2A}{\sqrt[3]{\cos^2A\cos^2B\cos^2C}}\geqslant 12\cos^2A$.

在这里我们利用,在锐角$\triangle ABC$中,$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}$这一常用结论

同理,$2\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2\geqslant 12\cos^2B$,$2\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2+\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2\geqslant 12\cos^2C$,

三式相加得,$\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2\geqslant 4(\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C)$.

**注** 本题是§1.1例6中所构造的一个不等式.

**例 15** 设$\triangle ABC$的外接圆半径与内切圆半径分别为$R$、$r$,求证

$\frac{R-\sqrt{R^2-2Rr}}{2R}\leqslant\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{R+\sqrt{R^2-2Rr}}{2R}$.

**分析** 有点像一元二次方程的求根公式,构造关于$\sin\frac{A}{2}$的不等式

**证明** $a=r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)=r\cdot\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=r\cdot\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}}\geqslant\frac{r\cos\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}$，

即 $2R\sin A\geqslant\frac{r\cos\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}\Leftrightarrow\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\geqslant\frac{r}{2R}\Leftrightarrow\sin^2\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}+\frac{r}{2R}\leqslant0$

$\Leftrightarrow\frac{R-\sqrt{R^2-2Rr}}{2R}\leqslant\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{R+\sqrt{R^2-2Rr}}{2R}$.

**注1** 问题也可以按如下方式证明：

原不等式$\Leftrightarrow R\sin^2\frac{A}{2}-R\sin\frac{A}{2}+\frac{r}{2}\leqslant0\Leftrightarrow\sin^2\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}+\frac{r}{2R}\leqslant0$

左边 $=\sin^2\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$=\sin\frac{A}{2}\left[\sin\frac{A}{2}-1-\left(\cos\frac{B+C}{2}-\cos\frac{B-C}{2}\right)\right]=\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-1\right)\leqslant0=$ 右边

**注2** 问题的另一个描述方式为：已知△$ABC$的外接圆半径与内切圆半径分别为$R$、$r$且为定值，求$A$的取值范围

**注3** 令$d=\sqrt{R^2-2Rr}$，则$d=|OI|$，其中$O$、$I$分别为△$ABC$的外心与内心。

**注4** 可以得到如下问题：

在△$ABC$中，求证 $\frac{3r}{2R}\leqslant\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}-\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{4}$.

（提示：$\frac{r}{2R}\leqslant\sin\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\leqslant\frac{1}{4}$）

将三角不等式代数化是证明三角不等式及求最值问题的常用方法，代数化的方式主要有：余弦定理代入，万能公式代入，整体代入等等。

**例16** 在△$ABC$中，求证 $\frac{\sqrt{\sin A\sin B}}{\sin\frac{C}{2}}+\frac{\sqrt{\sin B\sin C}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\sqrt{\sin C\sin A}}{\sin\frac{B}{2}}\geqslant3\sqrt{3}$

**证明** $\frac{\sqrt{\sin A\sin B}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\sqrt{\sin A\sin B}}{\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{2\sqrt{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$

$=\frac{2\sqrt{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}$,



令 $x=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}, y=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}, z=\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$,

则 $x、y、z>0, x+y+z=1$.

原不等式 $\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{1-x}+\frac{2\sqrt{y}}{1-y}+\frac{2\sqrt{z}}{1-z}\geqslant 3\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{1-x}+\frac{\sqrt{y}}{1-y}+\frac{\sqrt{z}}{1-z}\geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$……①

下证: $\frac{\sqrt{x}}{1-x}\geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}\cdot(1-x)\leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow x\cdot(1-x)^2\leqslant \frac{4}{27}$.

而 $x\cdot(1-x)^2=\frac{2x\cdot(1-x)\cdot(1-x)}{2}\leqslant \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2x+(1-x)+(1-x)}{3}\right]^3=\frac{4}{27}$.

同理可证: $\frac{\sqrt{y}}{1-y}\geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{z}}{1-z}\geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}z$.

三式相加可知①式成立,所以原不等式成立.

**例 17** 在 $\triangle ABC$ 中, $a\leqslant b\leqslant c$, 求证: $2\cos^2\frac{C}{2}\leqslant \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\leqslant 2\cos^2\frac{A}{2}$.

**证明** $\frac{a}{b+c}=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$

$=\frac{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{1+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}$

令 $x=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}, y=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}, z=\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$.

因为 $a\leqslant b\leqslant c$, 所以 $0<x\leqslant z\leqslant y$, 且 $x+y+z=1$.

所以 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{1-x}{1+x}+\frac{1-y}{1+y}+\frac{1-z}{1+z}$

$\geqslant \frac{1-x}{1+y}+\frac{1-y}{1+y}+\frac{1-z}{1+y}=\frac{3-x-y-z}{1+y}=\frac{2}{1+y}$,

所以 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant \frac{2}{1+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}=\frac{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos(\frac{B}{2}-\frac{C}{2})}\geqslant 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\leqslant 2\cos^2\frac{C}{2}$，

同理可证 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\leqslant 2\cos^2\frac{A}{2}$.

**例 18** 在△ABC 中，求证：

$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{24}[\cos^2(A-B)+\cos^2(B-C)+\cos^2(C-A)]\leqslant\frac{1}{8}$.

**证明** 右边不等式⇔$\cos^2(A-B)+\cos^2(B-C)+\cos^2(C-A)\leqslant 3$

因为 $\cos^2(A-B)\leqslant 1,\cos^2(B-C)\leqslant 1,\cos^2(C-A)\leqslant 1$.

所以上式成立，当且仅当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时取"="

下证：左边不等式.

只需证：$8\cos A\cos B\cos C\leqslant\cos^2(A-B)$……①即可.

不妨设 $A、B、C\in(0,\frac{\pi}{2})$，否则不等式显然成立

此时原不等式①⇔ $8\cos A\cos B\cdot\cos(A+B)\leqslant\cos^2(A-B)$

$\Leftrightarrow -8x\cdot(x-y)\leqslant(x+y)^2$

$\Leftrightarrow 9x^2-6xy+y^2\geqslant 0$

$\Leftrightarrow(3x-y)^2\geqslant 0$，显然成立

令 $x=\cos A\cos B,y=\sin A\sin B$，则 $x、y>0$.

所以 $\cos^2(A-B)\geqslant 8\cos A\cos B\cos C$.

当且仅当 $\tan A\tan B=3$ 时取"=".

同理可证：$\cos^2(B-C)\geqslant 8\cos A\cos B\cos C$；

$\cos^2(C-A)\geqslant 8\cos A\cos B\cos C$.

三式累加即可.

**注 1** 当 $A、B、C\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$(1)\Leftrightarrow\frac{8\cos A\cos B}{\cos^2(A-B)}\leqslant\frac{\cos(A-B)}{-\cos(A+B)}\Leftrightarrow\frac{8}{1+\tan A\tan B}\leqslant\frac{1+\tan A\tan B}{\tan A\tan B-1}\Leftrightarrow\tan^2A\tan^2B-6\tan A\tan B+9\geqslant 0\Leftrightarrow(\tan A\tan B-3)^2\geqslant 0$

**注 2** $(1)\Leftrightarrow\cos^2(A-B)\geqslant 4\cdot[\cos(A+B)+\cos(A-B)][-\cos(A+B)]$

$\Leftrightarrow[\cos(A-B)+2\cos(A+B)]^2\geqslant 0$

**注 3** 因为 $\sin 2A+\sin 2B=2\sin(A+B)\cos(A-B)$，

所以 $\cos^2(A-B)=\frac{(\sin 2A+\sin 2B)^2}{4\sin^2C}\geqslant\frac{4\sin A\sin B}{4\sin^2C}$，

所以 $\cos^2(A-B)\geqslant\frac{\sin 2A\cdot\sin 2B}{\sin^2C}$



同理 $\cos^2(B-C)\geqslant\frac{\sin2B\cdot\sin2C}{\sin^2A}$, $\cos^2(C-A)\geqslant\frac{\sin2C\sin2A}{\sin^2B}$.

所以 $\sum\cos^2(A-B)\geqslant\sum\frac{\sin2A\cdot\sin2B}{\sin^2C}\geqslant3\sqrt[3]{\frac{\sin^22A\sin^22B\sin^22C}{\sin^2A\sin^2B\sin^2C}}$

$=12\cdot\sqrt[3]{\cos^2A\cos^2B\cos^2C}$

$=\frac{12\cos A\cos B\cos C}{\sqrt[3]{\cos A\cos B\cos C}}\geqslant\frac{12\cos A\cos B\cos C}{\sqrt{\frac{1}{8}}}$

$=24\cos A\cos B\cos C$.

我们在§1.1得到如下不等式

**例 19** 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}+8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\geqslant2$.

下面我们利用半角公式及代数运算来证明上述不等式.

**证明** 由半角公式可知,原不等式 $\Leftrightarrow\sum\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}+8\cdot\frac{\prod(p-a)}{abc}\geqslant2$

令 $\begin{cases}a=x+y\\b=y+z\\c=z+x\end{cases}$, $x,y,z\in\mathbf{R}^+$, 则 $\begin{cases}x=p-b\\y=p-c\\z=p-a\end{cases}$

原不等式 $\Leftrightarrow\sum\frac{xy}{z(x+y+z)}+8\cdot\frac{xyz}{\prod(x+y)}\geqslant2$

$\Leftrightarrow\sum\frac{xy(y+z)(z+x)(x+y)}{z}+8xyz(x+y+z)$

$\geqslant2(x+y)(y+z)(z+x)(x+y+z)$

$\Leftrightarrow\sum\frac{y^3z^2+y^2z^3}{x}+2\sum(x^3y+xy^3)+2\sum x^2y^2+8\sum x^2yz$

$\geqslant2\sum x^3z+8\sum x^2yz+4\sum x^2y^2$

$\Leftrightarrow\sum\frac{y^3z^2+y^2z^3}{x}\geqslant2\sum x^2y^2$

$\Leftrightarrow\sum(y^4z^3+y^3z^4)\geqslant2\sum x^3y^3z$

$\Leftrightarrow\sum z^3(x^4+y^4)\geqslant\sum z^3(x^3y+y^3x)$

$\Leftrightarrow\sum z^3(x^4+y^4-x^3y-xy^3)\geqslant0$

$\Leftrightarrow\sum z^3(x-y)(x^3-y^3)\geqslant0$,

由于 $z>0$, $(x-y)(x^3-y^3)\geqslant0$

故上式成立,即原不等式成立.





**例 20** 在 $\triangle ABC$ 中，求证：$\frac{\cos A}{\sin^2 A}+\frac{\cos B}{\sin^2 B}+\frac{\cos C}{\sin^2 C}\geqslant\frac{R}{r}$.

**证明** 将角化为边 原不等式 $\Leftrightarrow\sum\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{a^2}{4R^2}}\geqslant\frac{R}{r}$

$\Leftrightarrow\sum\frac{2R^2}{abc}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{a}\geqslant\frac{R}{r}$

$\Leftrightarrow\sum\frac{2R^2}{abc}\left(\frac{b^2+c^2}{a}-a\right)\geqslant\frac{R}{r}$

$\Leftrightarrow\frac{2Rr}{abc}\cdot\sum\left(\frac{b^2+c^2}{a}-a\right)\geqslant 1$（由于 $S_{\triangle ABC}=\frac{abc}{4R}=\frac{r}{2}(a+b+c)$）

$\Leftrightarrow\frac{1}{a+b+c}\sum\left(\frac{b^2+c^2}{a}-a\right)\geqslant 1$

$\Leftrightarrow\sum\frac{b^2+c^2}{a}\geqslant 2\sum a$

即证 $\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}\geqslant 2(a+b+c)$（$a,b,c$ 为 $\triangle ABC$ 的三边长）.

事实上，$\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}\geqslant\frac{(a+b)^2}{a+b}=a+b$.

同理，$\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{c}\geqslant a+c$，$\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{b}\geqslant b+c$.

累加即有 $\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}\geqslant 2(a+b+c)$.

综上可知，原不等式成立.

**例 21** 已知 $\triangle ABC$ 为非钝角三角形，求证：$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\geqslant(\cos A+\cos B+\cos C)^2$，并指出等号何时成立.

**证明** 原不等式 $\Leftrightarrow(\cos A+\cos B)^2+(\cos B+\cos C)^2+(\cos C+\cos A)^2\leqslant 3$……①

令 $x=b^2+c^2-a^2$，$y=a^2+c^2-b^2$，$z=a^2+b^2-c^2$.

则 $x、y、z\geqslant 0$，当中若有一个为 0，则不妨设 $x=0$，$y,z>0$

则 ① $\Leftrightarrow\left(\frac{x}{2bc}+\frac{y}{2ac}\right)^2+\left(\frac{y}{2ac}+\frac{z}{2ab}\right)^2+\left(\frac{z}{2ab}+\frac{x}{2bc}\right)^2\leqslant 3$

$\Leftrightarrow(ax+by)^2+(by+cz)^2+(cz+ax)^2\leqslant 12a^2b^2c^2$……②

因为 $a=\sqrt{\frac{y+z}{2}}$，$b=\sqrt{\frac{z+x}{2}}$，$c=\sqrt{\frac{x+y}{2}}$

所以 ② 式左边 $=2(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)+2(bcyz+acxz+abxy)$

$=x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+yz\cdot\sqrt{(x+y)(y+z)}+xz\cdot\sqrt{(y+z)(y+z)}+xy\cdot\sqrt{(z+x)(x+y)}$



$$\leqslant x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+yz\cdot\frac{2x+y+z}{2}+zx\cdot\frac{2y+x+z}{2}+xy\cdot\frac{2z+x+y}{2}$$

$$=\frac{3}{2}[x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)]+3xyz$$

$$=\frac{3}{2}(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$=12\cdot\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\cdot\frac{z+x}{2}=12a^2b^2c^2$$

当且仅当 $x=y=z$ 或 $x$、$y$、$z$ 中有一个为 0，另两个相等时取“=”。

即 $\triangle ABC$ 为正三角形或等腰直角三角形时取等号。

**注** 当 $\triangle ABC$ 为直角三角形，不妨设 $A=\frac{\pi}{2}$，则 $\sum\sin^2 A=2$。

$$(\cos A+\cos B+\cos C)^2=(\cos B+\cos C)^2=2\cos^2\left(B-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 2$$

$$=\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$$

**例 22** 在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$4abc<(a^2+b^2+c^2)(a\cos A+b\cos B+c\cos C)\leqslant\frac{9}{2}abc.$$

**证明** 由于 $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2bc}+\frac{b(c^2+a^2-b^2)}{2ac}+\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{2ab}=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{2abc}$，

故 $4abc<(a^2+b^2+c^2)(a\cos A+b\cos B+c\cos C)\leqslant\frac{9}{2}abc$

$$\Leftrightarrow 8a^2b^2c^2<(a^2+b^2+c^2)(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4)\leqslant\frac{9}{2}a^2b^2c^2.$$

令 $x=a^2$，$y=b^2$，$z=c^2$，因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以，$x$、$y$、$z$ 为某三角形的三边。

这样原不等式 $\Leftrightarrow 8xyz<(x+y+z)(2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2)\leqslant 9xyz$

$$\Leftrightarrow 2xyz<x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2-x^3-y^3-z^3\leqslant 3xyz\cdots\cdots(*)$$

由 Schur 不等式可知，$x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2-x^3-y^3-z^3\leqslant 3xyz$ 成立。

$$x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2-x^3-y^3-z^3-2xyz$$

$z^3-z^2x-z^2y+(x-y)^2(x+y-z)=(x+y-z)(x-y-z)(x-y+z)$

$=-(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)<0$

这样（*）式成立，故原不等式成立

**例 23**　在 $\triangle ABC$ 中，求证：$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}<2$

**证明**　设 $x=\tan\frac{A}{2}, y=\tan\frac{B}{2}, z=\tan\frac{C}{2}$，则 $x,y,z>0$，$xy+yz+zx=1$

若 $\cos A+\cos B+\cos C<0$，则 $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}<0<2$.

若 $\cos A+\cos B+\cos C>0$，则原不等式 $\Leftrightarrow \sum\sin A<2\sum\cos A$

$\Leftrightarrow \sum\frac{2x}{1+x^2}<2\sum\frac{1-x^2}{1+x^2}\Leftrightarrow\sum\frac{x}{xy+yz+zx+x^2}<\sum\frac{1-x^2}{xy+yz+zx+x^2}$

$\Leftrightarrow\sum\frac{x}{(x+y)(x+z)}<\sum\frac{1-x^2}{(x+y)(x+z)}\Leftrightarrow\sum x(y+z)<\sum(1-x^2)(y+z)$

$\Leftrightarrow 2<\sum(y+z)-\sum x^2(y+z)\Leftrightarrow 2<\sum(y+z)(yz+zx+xy)-\sum x^2(y+z)$

$\Leftrightarrow 2<\sum x^2y+\sum xy^2+6xyz$

$\Leftrightarrow 4(xy+yz+zx)^3<(\sum x^2y+\sum xy^2+6xyz)^2$……（*）

一方面：$4(xy+yz+zx)^3=4(\sum x^3y^3+3\sum x^3y^2z+3\sum x^2y^3z+6x^2y^2z^2)$，

$(\sum x^2y+\sum xy^2+6xyz)^2=\sum x^4y^2+\sum x^2y^4+36x^2y^2z^2+12\sum x^3y^2z+12\sum x^2y^3z+2\sum x^3y^3+f(x,y,z)$，其中 $f(x,y,z)>0$（注：只需考虑 $4(xy+yz+zx)^3$ 展开式出现的项）。

另一方面：$\sum x^4y^2+\sum x^2y^4=\sum(x^4y^2+x^2y^4)\geq 2\sum x^3y^3$.

这样（*）式成立，即原不等式成立

**注 1**　2 是最佳常数，当 $A\to\frac{\pi}{2}, B\to\frac{\pi}{2}, C\to 0$ 时，$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}\to 2$.

写得更明确些，令 $A=\frac{\pi}{2}, B=\frac{\pi}{2}-\theta, C=\theta, \theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，则

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}=\frac{1+\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=1+\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}\to 2\quad(\theta\to 0\text{ 时})$$

**注 2**　由于 $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$，则 $2R(\sin A+\sin B+\sin C)=a+b+c$.

即　原不等式 $\Leftrightarrow a+b+c<4(R+r)\Leftrightarrow\triangle ABC$ 的半周长不超过其外接圆直径与内



切圆直径之和.

不妨设$\angle A$是最大角，则$A\in[\frac{\pi}{3},\pi)$.




图2-7

所以$\cot\frac{A}{2}\in(0,\sqrt{3}]$，如图2-7.

$r=DI=AD\cdot\tan\frac{A}{2}=\frac{b+c-a}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}$.

所以$\frac{b+c-a}{2}=r\cdot\cot\frac{A}{2}\leqslant\sqrt{3}r$

又因为$a=2R\sin A\leqslant 2R$

所以$\frac{b+c-a}{2}+a\leqslant 2R+\sqrt{3}r$.

即 $\frac{b+c+a}{2}\leqslant 2R+\sqrt{3}r$.

所以$\frac{a+b+c}{2}<2R+2r$

即$\triangle ABC$的半周长不超过其外接圆直径与内切圆直径之和.

最后，我们来看一个四边形内的问题，也算是对三角形内不等关系的一个推广

**例24** 已知$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\in(0,\frac{\pi}{2})$满足$\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=\pi$，求证：

$$\frac{\sqrt{2}\sin\theta_1-1}{\cos\theta_1}+\frac{\sqrt{2}\sin\theta_2-1}{\cos\theta_2}+\frac{\sqrt{2}\sin\theta_3-1}{\cos\theta_3}+\frac{\sqrt{2}\sin\theta_4-1}{\cos\theta_4}\geqslant 0.$$

**证明** 令$a=\tan\theta_1,b=\tan\theta_2,c=\tan\theta_3,d=\tan\theta_4$，则$a,b,c,d>0$，

且由$\tan(\theta_1+\theta_2)+\tan(\theta_3+\theta_4)=0$知$\frac{a+b}{1-ab}+\frac{c+d}{1-cd}=0$.

所以 $(a+b)(1-cd)+(c+d)(1-ab)=0$

$\Leftrightarrow a+b+c+d=abc+bcd+cda+dab$.

由于 $(a+b)(a+c)(a+d)=a^2(a+b+c+d)+abc+bcd+cda+dab$

$=(a^2+1)(a+b+c+d)$，

即 $\frac{a^2+1}{a+b}=\frac{(a+c)(a+d)}{a+b+c+d}$.

同理 $\frac{b^2+1}{b+c}=\frac{(b+d)(b+a)}{a+b+c+d}$，$\frac{c^2+1}{c+d}=\frac{(c+a)(c+b)}{a+b+c+d}$，

$\frac{d^2+1}{d+a}=\frac{(d+b)(d+c)}{a+b+c+d}$.

这样，$\frac{a^2+1}{a+b}+\frac{b^2+1}{b+c}+\frac{c^2+1}{c+d}+\frac{d^2+1}{d+a}$





$$= \frac{(a+c)(a+d)(b+d)(b+a)+(c+a)(c+b)+(d+b)(d+c)}{a+b+c+d}$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+bc+cd+da+ac+bd)}{a+b+c+d}$$

$$= a+b+c+d.$$

由 Cauchy 不等式可得

$$2(a+b+c+d)^2 = 2(a+b+c+d)\left(\frac{a^2+1}{a+b}+\frac{b^2+1}{b+c}+\frac{c^2+1}{c+d}+\frac{d^2+1}{d+a}\right)$$

$$= [(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)]\left(\frac{a^2+1}{a+b}+\frac{b^2+1}{b+c}+\frac{c^2+1}{c+d}+\frac{d^2+1}{d+a}\right)$$

$$\geqslant (\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}+\sqrt{d^2+1})^2,$$

所以 $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}+\sqrt{d^2+1} \leqslant \sqrt{2}(a+b+c+d)$，

即 $\frac{1}{\cos\theta_1}+\frac{1}{\cos\theta_2}+\frac{1}{\cos\theta_3}+\frac{1}{\cos\theta_4} \leqslant \sqrt{2}\left(\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1}+\frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2}+\frac{\sin\theta_3}{\cos\theta_3}+\frac{\sin\theta_4}{\cos\theta_4}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}\sin\theta_1-1}{\cos\theta_1}+\frac{\sqrt{2}\sin\theta_2-1}{\cos\theta_2}+\frac{\sqrt{2}\sin\theta_3-1}{\cos\theta_3}+\frac{\sqrt{2}\sin\theta_4-1}{\cos\theta_4} \geqslant 0$$

综上可知原不等式成立.

**注** 将 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ 看成凸四边形 $ABCD$ 的四个半角.

以上，我们从各个角度入手，解决了三角形内一些典型的问题，希望广大读者能从中学到更多，感悟更多.



# 第三章 习题训练

1. 考察三倍角的正、余弦公式 $\sin3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$，$\cos3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$，从 $\frac{\cos3\theta}{\cos\theta} = 4\cos^2\theta - 3$，$\frac{\sin3\theta}{\sin\theta} = 3 - 4\sin^2\theta$ 角度，你能构造出怎样的三角函数问题？

2. 考察 $f(a,b) = \frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a}$，$(a,b>0)$ 的最小值，你可以将之改造成怎样的三角函数问题？

3. 求值 $\frac{\sqrt{3} - 4\sin20^\circ + 8\sin^3 20^\circ}{2\sin20^\circ\sin480^\circ}$.

4. 求值：$\frac{(\sqrt{3}\tan12^\circ - 3)\csc12^\circ}{4\cos^2 12^\circ - 2}$.

5. 已知 $\alpha = \frac{2\pi}{1999}$，求值 $\cos\alpha\cos2\alpha\cos3\alpha\cdots\cos999\alpha$.

6. 求值：$(1+\tan1^\circ)(1+\tan2^\circ)(1+\tan3^\circ)\cdots(1+\tan44^\circ)(1+\tan45^\circ)$.

7. 化简：(1) $\frac{1}{\sin45^\circ\sin46^\circ} + \frac{1}{\sin47^\circ\sin48^\circ} + \cdots + \frac{1}{\sin133^\circ\sin134^\circ}$；

(2) $\frac{1}{\sin1^\circ\sin2^\circ} + \frac{1}{\sin2^\circ\sin3^\circ} + \cdots + \frac{1}{\sin89^\circ\sin90^\circ}$；

(3) $2\sin2^\circ + 4\sin4^\circ + 6\sin6^\circ + \cdots + 180\sin180^\circ$.

8. 用多种方法求值：$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$.

9. 已知 $\alpha = \frac{\pi}{7}$，

(1) 求证：$\sin^2 3\alpha - \sin^2\alpha = \sin2\alpha\sin3\alpha$；

(2) 求证：$\csc\alpha = \csc2\alpha + \csc4\alpha$；

(3) 求值：$\cos\alpha - \cos2\alpha + \cos3\alpha$；

(4) 求证：$\cos\alpha$ 是方程 $8x^3+4x^2-4x-1=0$ 的一个实根；

(5) 求证：$\cos\alpha$ 是一个无理数；

(6) 求值 $\tan\alpha\tan2\alpha\tan3\alpha$；

(7) 求值 $\tan^2\alpha+\tan^2 2\alpha+\tan^2 3\alpha$；

(8) 求值 $\tan^2\alpha\tan^2 2\alpha+\tan^2 2\alpha\tan^2 3\alpha+\tan^2 3\alpha\tan^2\alpha$；

(9) 求值：$\cot^2\alpha+\cot^2 2\alpha+\cot^2 3\alpha$.

10. 化简：(1) $\sin5A-5\sin3A+10\sin A$；

(2) $1+C_n^1\cos x+C_n^2\cos2x+C_n^3\cos3x+\cdots+C_n^n\cos nx\quad(n\in\mathbf{N}^*)$.

11. 已知 $A$、$B$ 为锐角，且 $\sin A\cos B+\sqrt{2\sin A}\sin B=\frac{3\sin A+1}{\sqrt5}$，求 $A$、$B$ 的值.

12. 化简：$\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos3^k x+3\cos3^{k-1}x}{3^k\sin3^k x}$.

13. 求证：$\prod_{k=1}^{n}\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]=\prod_{k=1}^{n}\cot\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]\quad(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$.

14. 已知 $x,y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，求证：$\sin^4x+3\sin^2x\cos^2y+\cos^4y=1$ 的充要条件是 $x=y$.

15. 求 $a_0$、$a_{lk}(1\leqslant l<k\leqslant n)$，使对任意 $x\in\mathbf{R}(\sin x\neq0)$ 均有 $\frac{\sin^2nx}{\sin^2x}=a_0+\sum_{1\leqslant l<k\leqslant n}a_{lk}\cdot\cos2(k-l)x$.

16. 已知 $\frac{\tan(\theta+\alpha)}{a}=\frac{\tan(\theta+\beta)}{b}=\frac{\tan(\theta+\gamma)}{c}$，求证：$\frac{a+b}{a-b}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{b+c}{b-c}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{c+a}{c-a}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$.

17. 在 $\triangle ABC$ 中，$\alpha+\beta=A$，求证：$\cos\alpha\cos B+\cos\beta\cos C=\sin\alpha\sin B+\sin\beta\sin C$.

18. 在 $\triangle ABC$ 中，三边 $a$、$b$、$c$ 满足 $2b=a+c$，求 $5\cos A-4\cos A\cos C+5\cos C$ 的值.

19. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $a\tan A+b\tan B=(a+b)\tan\frac{A+B}{2}$，求证 $a=b$.

20. 在 $\triangle ABC$ 中 $3\sin A+4\cos B=6$，$4\sin B+3\cos A=1$，求角 $C$ 的度数.

21. 已知 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$、$\varphi\in\mathbf{R}$，且满足 $\begin{cases}\sin\alpha+7\sin\beta=4(\sin\gamma+2\sin\varphi)\\\cos\alpha+7\cos\beta=4(\cos\gamma+2\cos\varphi)\end{cases}$，

求证：$2\cos(\alpha-\varphi)=7\cos(\beta-\gamma)$.

22. 求函数 $f(x)=\cos3x+4\cos2x+8\cos x$，$x\in\mathbf{R}$ 的最小值.

23. 已知锐角 $\alpha$、$\beta$，实数 $x$ 满足 $x\cdot\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}\right)>0$，求证：$\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\right)^x+\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\right)^x<2$



24. 已知锐角 $\alpha$、$\beta$ 满足 $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}+\dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha}=2$，求证：$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$。

25. 已知 4 个实常数 $a$、$b$、$A$、$B$ 和 $f(\theta)=1-a\cos\theta-b\sin\theta-A\sin2\theta-B\cos2\theta$，求证：如果对于所有实数 $\theta$ 均有 $f(\theta)\geqslant0$，则 $a^2+b^2\leqslant2$ 且 $A^2+B^2\leqslant1$。

26. 求函数 $f(x)=|\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x|$，$x\in\mathbf{R}$ 的最小值。

27. 求证：$(\sin x+a\cos x)(\sin x+b\cos x)\leqslant1+\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$。

28. 已知 $x\geqslant y\geqslant z\geqslant\dfrac{\pi}{12}$，且 $x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$，求 $\cos x\sin y\cos z$ 的最值。

29. 求函数 $f(x)=5\cos^2x-6\sin2x+20\sin x-30\cos x+7$ 的最值。

30. 设 $a$、$b\in\mathbf{R}^+$，求 $y=\dfrac{a}{\sin\theta}+\dfrac{b}{\cos^2\theta}$，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最小值。

31. 已知函数 $f(x)=\left|\sin x+\dfrac{2}{3+\sin x}+b\right|$ 的最大值为 $g(b)$，求 $g(b)$ 的最小值。

32. 若 $\alpha$、$\beta$ 为锐角，则 $\cos\alpha\sin2\alpha\sin2\beta\leqslant\dfrac{4\sqrt3}{9}$。

33. 已知 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 为锐角，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，求证：$\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha+\cot\alpha\cot\beta\leqslant\dfrac{3}{2}$。

34. 求证：$\cos1^\circ$ 是无理数。

35. 设 $f(x)=x^2+ax+b\cos x$，求所有的实数对 $(a,b)$，使得方程 $f(x)=0$ 与 $f(f(x))=0$ 的实数解集相同且非空。

36. 设 $x$、$y\in\mathbf{R}$，且集合 $\{\cos nx+\cos ny\mid n\in\mathbf{N}^*\}$ 是一个有限集，求证：$x$、$y$ 都是 $\pi$ 的有理数倍数。

37. 求最小的 $a\in\mathbf{N}^*$，使得下列方程有实数根：

$$\cos^2\pi(a-x)-2\cos\pi(a-x)+\cos\frac{3\pi x}{2a}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2a}+\frac{\pi}{3}\right)+2=0.$$

38. 在 $\triangle ABC$ 中，求 $S=\sqrt{3\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+1}+\sqrt{3\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+1}+\sqrt{3\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}+1}$ 的整数部分。

39. 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A+\sin B-\sin C\leqslant1$，求证：$\min\{A+B,B+C,C+A\}<30^\circ$。

40. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，求证：$2b\cos\dfrac{C}{2}+2c\cos\dfrac{B}{2}>a+b+c$。

41. 求证：在 $\triangle ABC$ 中，(1) $\cos^2 A+\cos B+\cos C>\frac{3}{4}$；

(2) $\cos A+\cos^2 B+\cos^2 C>\frac{3}{4}$.

42. 在 $\triangle ABC$ 中，对实数 $\lambda$ 有 $\cos^2 A+\lambda(\sin 2B+\sin 2C)\leqslant 1+\lambda^2$，$\sin^2 A+\lambda(\cos 2B+\cos 2C)\leqslant 1+\lambda^2$；当且仅当 $0<\lambda\leqslant 1$ 且 $B=C=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\lambda$ 时等号成立.

43. 在 $\triangle ABC$ 中，有 $\cos B\cos C\sin^k\frac{A}{2}+\cos C\cos A\sin^k\frac{B}{2}+\cos A\cos B\sin^k\frac{C}{2}<1$，其中 $k\geqslant 0$.

44. 设 $x、y、z\in\mathbf{R}$，$m、n\in\mathbf{N}$，$m,n\geqslant 2$，求证：$\sin^m x\cos^n y+\sin^m y\cos^n z+\sin^m z\cos^n x\leqslant 1$ 且 1 为最小上界.

45. 在 $\triangle ABC$ 中，比较 $\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2C}$ 与 $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}$ 的大小.

46. 在钝角 $\triangle ABC$ 中，求证：(1) $\sin A\sin B\sin C<\frac{1}{2}$；(2) $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}<\frac{1+\sqrt{2}}{4}$.

47. 在 $\triangle ABC$ 中，求证：$a^3\cos A+b^3\cos B+c^3\cos C\leqslant\frac{3}{2}abc$.

48. 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{C-A}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right).$$

49. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A、\angle B、\angle C$ 的对边分别是 $a、b、c$，有不等式

$\left|\frac{\sin A}{\sin A+\sin B}+\frac{\sin B}{\sin B+\sin C}+\frac{\sin C}{\sin C+\sin A}-\frac{3}{2}\right|<m$，则 $m=\frac{8\sqrt{2}-5\sqrt{5}}{6}$ 是最小上界.



# 参考答案

1. 由于 $\frac{\cos 3^{k+1}\theta}{\cos 3^k\theta}=4\cos^2 3^k\theta-3$，则 $\prod_{k=0}^{n}(4\cos^2 3^k\theta-3)=\frac{\cos 3^{n+1}\theta}{\cos\theta}$. 又由于 $\frac{\sin 3^{k+1}\theta}{\sin 3^k\theta}=3-4\sin^2 3^k\theta$，则 $\prod_{k=0}^{n}(3-4\sin^2 3^k\theta)=\frac{\sin 3^{n+1}\theta}{\sin\theta}$.

若令 $\theta=9^\circ$，$n=2$，则 $(4\cos^2 9^\circ-3)(4\cos^2 27^\circ-3)=\tan 9^\circ$

若令 $\theta=9^\circ$，$n=4$，则 $(4\cos^2 9^\circ-3)(4\cos^2 27^\circ-3)(4\cos^2 81^\circ-3)(4\cos^2 243^\circ-3)=1$ 等.

2. $f(a,b)=\frac{a^2+2a+1}{b}+\frac{b^2+2b+1}{a}=\left(\frac{a^2}{b}+\frac{1}{b}+\frac{b^2}{a}+\frac{1}{a}\right)+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$

$\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{a^2}{b}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{b^2}{a}\cdot\frac{1}{a}}+2\cdot 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=4+4=8$，当且仅当 $a=b=1$ 时取"="

或 $f(a,b)=\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}\geqslant\frac{(2\sqrt{a})^2}{b}+\frac{(2\sqrt{b})^2}{a}=4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geqslant 4\cdot 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=8$，

当且仅当 $a=b=1$ 时取"="，

所以 $f(a,b)_{\min}=8$.

将其改造为三角函数问题.

(1) 设 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，取 $a=\sin\alpha$，$b=\cos\beta$，则有 $\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos\beta}+\frac{(1+\cos\beta)^2}{\sin\alpha}\geqslant 8$.

(2) 设 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，取 $a=\sin 2\alpha$，则有 $\frac{\cos^4\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos 2\beta}+\frac{\cos^4\beta}{\sin 2\alpha}\geqslant 2$.

(3) 设 $\alpha,\beta\neq\frac{k\pi}{2}$，取 $a=\tan^2\alpha$，$b=\tan^2\beta$，则有 $\frac{\sec^4\alpha}{\tan^2\beta}+\frac{\sec^4\beta}{\tan^2\alpha}$ 的最小值为______.

3. 原式 $=\frac{\sqrt{3}-4\sin 20^\circ(1-2\sin^2 20^\circ)}{\sqrt{3}\sin 20^\circ}=\frac{\sqrt{3}-4\sin 20^\circ\cos 40^\circ}{\sqrt{3}\sin 20^\circ}$

$=\frac{2\sin(40^\circ+20^\circ)-4\sin 20^\circ\cos 40^\circ}{\sqrt{3}\sin 20^\circ}=\frac{2(\sin 40^\circ\cos 20^\circ-\cos 40^\circ\sin 20^\circ)}{\sqrt{3}\sin 20^\circ}$

$=\frac{2\sin(40^\circ-20^\circ)}{\sqrt{3}\sin 20^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$



4. 原式 $=\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}\sin12^\circ}{\cos12^\circ}-3\right)\cdot\dfrac{1}{\sin12^\circ}}{4\cos^2 12^\circ-2}$(切、割化为弦)

$$=\frac{\sqrt{3}\sin12^\circ-3\cos12^\circ}{2\sin12^\circ\cos12^\circ(2\cos^2 12^\circ-1)}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin12^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos12^\circ\right)}{\sin24^\circ\cos24^\circ}\text{(逆用二倍角公式)}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}(\sin12^\circ\cos60^\circ-\cos12^\circ\sin60^\circ)}{\sin24^\circ\cos24^\circ}\text{(常数变换)}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}\sin(12^\circ-60^\circ)}{2\sin24^\circ\cos24^\circ}\text{(逆用差角公式)}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}\sin(-48^\circ)}{\sin48^\circ}=-4\sqrt{3}\text{(逆用二倍角公式)}$$

5. 设 $P=\cos\alpha\cos2\alpha\cos3\alpha\cdots\cos999\alpha$,$Q=\sin\alpha\sin2\alpha\sin3\alpha\cdots\sin999\alpha$.

故 $2^{999}PQ=(2\cos\alpha\sin\alpha)(2\cos2\alpha\sin2\alpha)(2\cos3\alpha\sin3\alpha)\cdots(2\cos999\alpha\cdot\sin999\alpha)$

$=\sin2\alpha\sin4\alpha\sin6\alpha\cdots\sin998\alpha[-\sin(2\pi-1000\alpha)][-\sin(2\pi-1002\alpha)]\cdots[-\sin(2\pi-1998\alpha)]$

$=\sin2\alpha\sin4\alpha\cdots\sin998\alpha\sin999\alpha\sin997\alpha\cdots\sin\alpha=Q$

而 $Q\neq0$,所以 $P=\dfrac{1}{2^{999}}$

6. 首先我们有 $(1+\tan k^\circ)[1+\tan(45^\circ-k^\circ)]=2$

事实上,$(1+\tan k^\circ)\left(1+\dfrac{1-\tan k^\circ}{1+\tan k^\circ}\right)=1+\tan k^\circ+1-\tan k^\circ=2$

这样 $(1+\tan1^\circ)(1+\tan2^\circ)\cdots(1+\tan44^\circ)(1+\tan45^\circ)=[(1+\tan1^\circ)(1+\tan44^\circ)][(1+\tan2^\circ)(1+\tan43^\circ)]\cdots[(1+\tan22^\circ)(1+\tan23^\circ)][1+\tan45^\circ]=2^{22}\cdot2=2^{23}$

7. 由于 $\dfrac{\sin1^\circ}{\sin k^\circ\sin(k+1)^\circ}=\dfrac{\sin[(k+1)^\circ-k^\circ]}{\sin k^\circ\sin(k+1)^\circ}=\dfrac{\sin(k+1)^\circ\cos k^\circ-\sin k^\circ\cos(k+1)^\circ}{\sin k^\circ\sin(k+1)^\circ}=\cot k^\circ-\cot(k+1)^\circ$,故 $\dfrac{1}{\sin k^\circ\sin(k+1)^\circ}=\dfrac{1}{\sin1^\circ}[\cot k^\circ-\cot(k+1)^\circ]$

(1) $\dfrac{1}{\sin45^\circ\sin46^\circ}+\dfrac{1}{\sin47^\circ\sin48^\circ}+\cdots+\dfrac{1}{\sin133^\circ\sin134^\circ}$

$=\dfrac{1}{\sin1^\circ}[(\cot45^\circ-\cot46^\circ)+(\cot47^\circ-\cot48^\circ)+\cdots+(\cot133^\circ-\cot134^\circ)]$

$=\dfrac{1}{\sin1^\circ}[(\cot45^\circ-\cot46^\circ)+(\cot47^\circ-\cot48^\circ)+\cdots+(\cot89^\circ-\cot90^\circ)+(\cot88^\circ-\cot89^\circ)+(\cot86^\circ-\cot87^\circ)+\cdots+(\cot46^\circ-\cot47^\circ)]=\dfrac{1}{\sin1^\circ}(\cot45^\circ-\cot90^\circ)=\dfrac{1}{\sin1^\circ}$

(2) $\dfrac{1}{\sin1^\circ\sin2^\circ}+\dfrac{1}{\sin2^\circ\sin3^\circ}+\cdots+\dfrac{1}{\sin89^\circ\sin90^\circ}=\dfrac{1}{\sin1^\circ}[(\cot1^\circ-\cot2^\circ)+(\cot2^\circ-\cot3^\circ)+\cdots+(\cot89^\circ-\cot90^\circ)]=\dfrac{1}{\sin1^\circ}(\cot1^\circ-\cot90^\circ)=\dfrac{\cos1^\circ}{\sin^2 1^\circ}$

(3) 由于 $2\sin 2k^\circ\cdot\sin 1^\circ=\cos(2k-1)^\circ-\cos(2k+1)^\circ$

故 $2\sin2^\circ\cdot\sin1^\circ+2(2\sin4^\circ\cdot\sin1^\circ)+3(2\sin6^\circ\cdot\sin1^\circ)+\cdots+89\cdot(2\sin178^\circ\cdot\sin1^\circ)$

$=(\cos1^\circ-\cos3^\circ)+2(\cos3^\circ-\cos5^\circ)+3(\cos5^\circ-\cos7^\circ)+\cdots+89(\cos177^\circ-\cos179^\circ)$

$=\cos1^\circ+\cos3^\circ+\cos5^\circ+\cdots+\cos177^\circ-89\cos179^\circ$

$=\cos1^\circ+89\cos1^\circ=90\cos1^\circ$

所以 $2\sin2^\circ+4\sin4^\circ+6\sin6^\circ+\cdots+180\sin180^\circ=90\cot1^\circ$

8. 解法1：原式 $=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\cos\frac{3\pi}{7}+2\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}=\cos\frac{3\pi}{7}\left(2\cos\frac{2\pi}{7}+1\right)=$

$$\cos\frac{3\pi}{7}\left(3-4\sin^2\frac{\pi}{7}\right)=\frac{\cos\frac{3\pi}{7}\left(3\sin\frac{\pi}{7}-4\sin^3\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\cos\frac{3\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{6\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{2}$$

解法2：原式 $=\dfrac{2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}$

$$=\frac{\left(\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{7\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{2\pi}{7}}$$

解法3：设 $z=\cos\theta+i\sin\theta,\theta=\frac{2}{7}\pi$，则 $\bar{z}=\cos\theta-i\sin\theta$

$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta,\overline{z^n}=\cos n\theta-i\sin n\theta$，故 $\cos n\theta=\frac{z^n+\overline{z^n}}{2}=\frac{z^{2n}+1}{2\cdot z^n}$

从而原式 $=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=-\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}+\frac{z^4+1}{z^2}+\frac{z^6+1}{z^3}\right)=\frac{-1}{2z^3}(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)+\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{1}{2\cdot z^3}\cdot\frac{z^7-1}{z-1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\text{（因为 }z^7=1\text{）}.$$

解法4：由于 $z^7+1=0$ 在复数范围内所有的根为：$-1,\cos\frac{\pi}{7}\pm i\sin\frac{\pi}{7},\cos\frac{3\pi}{7}\pm i\sin\frac{3\pi}{7},\cos\frac{5\pi}{7}\pm i\sin\frac{5\pi}{7}$，由韦达定理得：

$$-1+\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{3\pi}{7}+i\sin\frac{3\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{3\pi}{7}-i\sin\frac{3\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{5\pi}{7}+i\sin\frac{5\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{5\pi}{7}-i\sin\frac{5\pi}{7}\right)=0$$

即 $-1+2\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right)=0$，这样 $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$

即 $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

解法5 由于在 $\triangle ABC$ 中有恒等式 $\cos2A+\cos2B+\cos2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$





令 $A=\frac{\pi}{7}, B=\frac{2\pi}{7}, C=\frac{4\pi}{7}$，则

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}=-1-4\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$$

即 $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=1+4\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=1+\frac{8\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=1+$

$$\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

9 (1) $\sin^2 3\alpha-\sin^2\alpha=(\sin3\alpha-\sin\alpha)(\sin3\alpha+\sin\alpha)=2\cos2\alpha\sin\alpha\cdot2\sin2\alpha\cos\alpha$

$=\sin4\alpha\sin2\alpha=\sin(\pi-4\alpha)\sin2\alpha=\sin3\alpha\sin2\alpha$

(2) $\sin3\alpha=\sin4\alpha\Leftrightarrow\sin2\alpha\sin3\alpha=\sin2\alpha\sin4\alpha\Leftrightarrow(2\cos\alpha\sin3\alpha)\sin\alpha=\sin2\alpha\sin4\alpha$

$\Leftrightarrow(\sin2\alpha+\sin4\alpha)\sin\alpha=\sin2\alpha\sin4\alpha\Leftrightarrow\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin2\alpha}+\frac{1}{\sin4\alpha}$

$\Leftrightarrow\csc\alpha=\csc2\alpha+\csc4\alpha$

(3) $\cos\alpha-\cos2\alpha+\cos3\alpha=-\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)$

$$=-\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{7\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=-\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{2}$$

(4) 由于 $\sin3\alpha=\sin4\alpha$，则 $3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=2\sin2\alpha\cos2\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha(2\cos^2\alpha-1)$

$\Leftrightarrow3-4(1-\cos^2\alpha)=4\cos\alpha(2\cos^2\alpha-1)\Leftrightarrow8\cos^3\alpha-4\cos^2\alpha-4\cos\alpha+1=0$.

即 $\cos\alpha$ 是方程 $8x^3-4x^2-4x+1=0$ 的一个实根.

(5) 由(4)可知 $2\cos\alpha$ 是 $x^3-x^2-2x+1=0$ 的一个实根，而 $x^3+x^2-2x-1=0$ 的有理根 $x\in\{-1,1\}$，而 $-1,1$ 均不为 $x^3+x^2-2x-1=0$ 的根

故 $2\cos\alpha$ 不为 $x^3+x^2-2x-1=0$ 有理根，即 $2\cos\alpha$ 为无理数

所以 $\cos\alpha$ 为无理数

(6) 由于 $3\alpha+4\alpha=\pi$，故 $\tan3\alpha+\tan4\alpha=0\Leftrightarrow\frac{\tan\alpha+\tan2\alpha}{1-\tan\alpha\tan2\alpha}=-\frac{2\tan2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha}\Leftrightarrow\frac{\tan\alpha+\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{1-\tan\alpha\cdot\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$

$$=-\frac{2\cdot\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{1-\left(\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\right)^2}\Leftrightarrow\tan^6\alpha-21\tan^4\alpha+35\tan^2\alpha-7=0$$

故 $\tan^2\alpha$ 是方程 $x^3-21x^2+35x-7=0$ 的实根

同理，由于 $6\alpha+8\alpha=2\pi$ 及 $9\alpha+12\alpha=3\pi$ 知 $\tan[3(2\alpha)]+\tan[4(2\alpha)]=0$ 及 $\tan[3(3\alpha)]+\tan[4(3\alpha)]=0$，这样 $\tan^2 2\alpha$，$\tan^2 3\alpha$ 也是 $x^3-21x^2+35x-7=0$ 的实根

所以方程 $x^3-21x^2+35x-7=0$ 的三个实根分别为 $\tan^2\alpha$，$\tan^2 2\alpha$，$\tan^2 3\alpha$

由韦达定理可知 $\tan^2\alpha\tan^2 2\alpha\tan^2 3\alpha=7$，$\tan^2\alpha+\tan^2 2\alpha+\tan^2 3\alpha=21$，$\tan^2\alpha\tan^2 2\alpha+\tan^2 2\alpha\tan^2 3\alpha+\tan^2 3\alpha\tan^2\alpha=35$

所以，$\tan\alpha\tan 2\alpha\tan 3\alpha=\sqrt{7}$

(7) 由(6)知，$\tan^2\alpha+\tan^2 2\alpha+\tan^2 3\alpha=21$

(8) 由(6)知，$\tan^2\alpha\tan^2 2\alpha+\tan^2 2\alpha\tan^2 3\alpha+\tan^2 3\alpha\tan^2\alpha=35$

(9) 由(6)知，$\cot^2\alpha+\cot^2 2\alpha+\cot^2 3\alpha=\dfrac{1}{\tan^2\alpha}+\dfrac{1}{\tan^2 2\alpha}+\dfrac{1}{\tan^2 3\alpha}$

$=\dfrac{\tan^2\alpha\tan^2 2\alpha+\tan^2 2\alpha\tan^2 3\alpha+\tan^2 3\alpha\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha\tan^2 2\alpha\tan^2 3\alpha}=\dfrac{35}{7}=5.$

10. (1) 令 $z=\cos A+i\sin A$，则 $\bar{z}=\cos A-i\sin A$，$\sin A=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$，$\sin 3A=\dfrac{z^3-\overline{z^3}}{2i}$，$\sin 5A=\dfrac{z^5-\overline{z^5}}{2i}$

故 $\sin 5A-5\sin 3A+10\sin A=\dfrac{z^5-\overline{z^5}}{2i}-5\cdot\dfrac{z^3-\overline{z^3}}{2i}+10\cdot\dfrac{z-\bar{z}}{2i}=\dfrac{1}{2i}(z^5-5z^3+10z-10\bar{z}+5\overline{z^3}-\overline{z^5})=\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})^5=16\cdot\left(\dfrac{z-\bar{z}}{2i}\right)^5=16\sin^5 A$

(2) 令 $z=\cos x+i\sin x$，则一方面由二项式定理可知，

$(1+z)^n=1+C_n^1 z+C_n^2 z^2+\cdots+C_n^k z^k+\cdots+C_n^n z^n=(1+C_n^1\cos x+C_n^2\cos 2x+\cdots+C_n^n\cos nx)+i(C_n^1\sin x+C_n^2\sin 2x+\cdots+C_n^n\sin nx)$

另一方面由棣莫佛定理可知，$(1+z)^n=(1+\cos x+i\sin x)^n=\left(2\cos^2\dfrac{x}{2}+2i\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\right)^n=2^n\cos^n\dfrac{x}{2}\left(\cos\dfrac{x}{2}+i\sin\dfrac{x}{2}\right)^n=2^n\cos^n\dfrac{x}{2}\left(\cos\dfrac{nx}{2}+i\sin\dfrac{nx}{2}\right)$

故 $1+C_n^1\cos x+C_n^2\cos 2x+\cdots+C_n^n\cos nx=2^n\cos^n\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{nx}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$

11. 设 $l$：$x\cdot\sin A+\sqrt{2\sin A}\cdot y=\dfrac{3\sin A+1}{\sqrt{5}}$，则点 $(\cos B,\sin B)$ 既在直线 $l$ 上，又在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上，故圆心 $O$ 到直线 $l$ 的距离 $d=\dfrac{\left|\dfrac{3\sin A+1}{\sqrt{5}}\right|}{\sqrt{2\sin A+\sin^2 A}}\leqslant 1$

即 $(2\sin A-1)^2\leqslant 0$，所以 $\sin A=\dfrac{1}{2}$

又因为 $0<A<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$，代入原方程可求得 $B=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

12. 由于 $\dfrac{2(\cos 3\alpha+3\cos\alpha)}{\sin 3\alpha}=\dfrac{3(2\cos\alpha+\cos 3\alpha)-\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha}=\dfrac{3(4\cos^2\alpha-1)\cos\alpha}{\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)}-\cot 3\alpha=3\cot\alpha-\cot 3\alpha$





令 $\alpha = 3^{k-1}x, k = 1,2,\cdots,n-1$，则

$$\frac{\cos 3^k x + 3\cos 3^{k-1} x}{3^{k}\sin 3^k x} = \left(\frac{\cot 3^{k-1}x}{3^{k-2}} - \frac{\cot 3^k x}{3^{k-1}}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos 3^k x + 3\cos 3^{k-1} x}{3^k \sin 3^k x} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\cot 3^{k-1}x}{3^{k-2}} - \frac{\cot 3^k x}{3^{k-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(3\cot x - \frac{\cot 3^n x}{3^{n-1}}\right)$$

13. 令 $u_k = \tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right], v_k = \tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right], t_k = \tan\frac{3^k\pi}{3^n-1}$

$u_k = \tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3^k\pi}{3^n-1}\right) = \frac{\sqrt{3}+t_k}{1-\sqrt{3}t_k}, v_k = \tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3^k\pi}{3^n-1}\right) = \frac{\sqrt{3}-t_k}{1+\sqrt{3}t_k}$

由于 $\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$，故 $t_{k+1} = \frac{3t_k - t_k^3}{1-3t_k^2}$

所以 $\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{3-t_k^2}{1-3t_k^2} = \frac{\sqrt{3}+t_k}{1-\sqrt{3}t_k}\cdot\frac{\sqrt{3}-t_k}{1+\sqrt{3}t_k} = u_k\cdot v_k$

这样 $\prod_{k=1}^{n}u_k v_k = \frac{t_2}{t_1}\cdot\frac{t_3}{t_2}\cdots\frac{t_n}{t_{n-1}}\cdot\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{t_{n+1}}{t_1} = \frac{\tan\frac{3^n\pi}{3^n-1}}{\tan\frac{\pi}{3^n-1}} = 1$

所以 $\prod_{k=1}^{n}u_k = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}v_k} = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{v_k}$

即有 $\prod_{k=1}^{n}\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right] = \prod_{k=1}^{n}\cot\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]$

14. 0 $\sin^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 y + \cos^6 y - 1 = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 y)^3 + (-1)^3 - 3\sin^2 x\cdot\cos^2 y\cdot(-1)$

$= (\sin^2 x + \cos^2 y - 1)[\sin^4 x + \cos^4 y + (-1)^2 - \sin^2 x\cos^2 y - \sin^2 x\cdot(-1) - \cos^2 y\cdot(-1)]$

$= \frac{1}{2}(\sin^2 x + \cos^2 y - 1)[(\sin^2 x - \cos^2 y)^2 + (\sin^2 x + 1)^2 + (\cos^2 y + 1)^2]$

所以 $\sin^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 y + \cos^6 y = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 y - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = \sin^2 y \Leftrightarrow \sin x = \sin y \Leftrightarrow x = y$（由于 $x,y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$）

注 $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)[a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)] = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$.

15. 由于 $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x + \cdots + \sin 2nx = \frac{\sin nx\cdot\sin(n+1)x}{\sin x}$

$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cdots + \cos 2nx = \frac{\sin nx\cdot\cos(n+1)x}{\sin x}$

故 $\frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 nx\cdot\sin^2(n+1)x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 nx\cdot\cos^2(n+1)x}{\sin^2 x} = (\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x + \cdots + \sin 2nx)^2 + (\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cdots + \cos 2nx)^2 = n + \sum_{1\le l<k\le n}(2\sin 2lx\cdot\sin 2kx + 2\cos 2lx\cos 2kx) = n + 2\sum_{1\le l<k\le n}\cos 2(k-l)x$



所以 $a_{n+1} = a_n a_{n-1} - 2$ 即为所求

16. 设 $a = k\tan(\theta + \alpha)$，则 $b = k\tan(\theta + \beta)$，$c = k\tan(\theta + \gamma)$

$$\frac{a+b}{a-b}\cdot\sin^2(\alpha-\beta) = \frac{k[\tan(\theta+\alpha)+\tan(\theta+\beta)]}{k[\tan(\theta+\alpha)-\tan(\theta+\beta)]}\cdot\sin^2(\alpha-\beta)$$

$$= \frac{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)+\sin(\theta+\beta)\cdot\cos(\theta+\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)-\sin(\theta+\beta)\cos(\theta+\alpha)}\cdot\sin^2(\alpha-\beta)$$

$$= \frac{\sin(2\theta+\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}\cdot\sin^2(\alpha-\beta) = \sin(2\theta+\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$$

$$= \frac{1}{2}[\cos2(\theta+\beta)-\cos2(\theta+\alpha)]$$

同理可证 $\frac{b+c}{b-c}\sin^2(\beta-\gamma) = \frac{1}{2}[\cos2(\theta+\gamma)-\cos2(\theta+\beta)]$，

$$\frac{c+a}{c-a}\sin^2(\gamma-\alpha) = \frac{1}{2}[\cos2(\theta+\alpha)-\cos2(\theta+\gamma)]$$

三式相加即有 $\frac{a+b}{a-b}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{b+c}{b-c}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{c+a}{c-a}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$.

17. $\cos\alpha\cos B+\cos\beta\cos C-(\sin\alpha\sin B+\sin\beta\sin C)=\cos\alpha\cos B-\sin\alpha\sin B+(\cos\beta\cos C-\sin\beta\sin C)=\cos(\alpha+B)+\cos(\beta+C)=2\cos\frac{\alpha+B+\beta+C}{2}\cos\frac{\alpha+B-\beta-C}{2}=2\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{\alpha+B-\beta-C}{2}=0$.

18. $2b=a+c\Leftrightarrow 2\sin B=\sin A+\sin C\Leftrightarrow 2\cos\frac{A+C}{2}=\cos\frac{A-C}{2}\Leftrightarrow\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 5\cos A-4\cos A\cos C+5\cos C=4$

19. $a\tan A+b\tan B-(a+b)\tan\frac{A+B}{2}=a(\tan A-\tan\frac{A+B}{2})+b(\tan B-\tan\frac{A+B}{2})$

$$=a\left[\frac{\sin A}{\cos A}-\frac{1-\cos(A+B)}{\sin(A+B)}\right]+b\left[\frac{\sin B}{\cos B}-\frac{1-\cos(A+B)}{\sin(A+B)}\right]$$

$$=a\cdot\frac{\sin A\cdot\sin(A+B)+\cos A\cos(A+B)-\cos A}{\cos A\sin(A+B)}+b\cdot\frac{\sin B\cdot\sin(A+B)+\cos B\cos(A+B)-\cos B}{\cos B\sin(A+B)}$$

$$=a\cdot\frac{\cos B-\cos A}{\cos A\cdot\sin(A+B)}+b\cdot\frac{\cos A-\cos B}{\cos B\cdot\sin(A+B)}$$

$$=\frac{\cos B-\cos A}{\sin(A+B)}\left(\frac{2R\sin A}{\cos A}-\frac{2R\sin B}{\cos B}\right)$$

$$=\frac{2R(\cos B-\cos A)}{\sin(A+B)}(\tan A-\tan B)=0$$

所以 $\cos B=\cos A$ 或 $\tan A=\tan B$，所以 $A=B$，所以 $a=b$.

20. $6^2+8^2=(3\sin A+4\cos B)^2+(4\sin B+3\cos A)^2=3^2(\sin^2A+\cos^2A)+4^2(\cos^2B+\sin^2B)+24(\sin A\cos B+\cos A\sin B)=9+16+24\sin(A+B)=9+16+24\sin(\pi-C)=25+24\sin C$

所以 $\sin C=\frac{1}{2}$，而 $0<C<\pi$，故 $C=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5}{6}\pi$.





若 $C=\frac{5}{6}\pi$，则 $A<\frac{\pi}{6}$，此时，$3\sin A+4\cos B<3\times\frac{1}{2}+4<6$ 不合题意

故 $C=\frac{\pi}{6}$ 即为所求

21. 由题意可得 $\begin{cases}\sin\alpha-8\sin\varphi=4\sin\gamma-7\sin\beta\\ \cos\alpha-8\cos\varphi=4\cos\gamma-7\cos\beta\end{cases}$，两式平方相加得

$(\sin\alpha-8\sin\varphi)^2+(\cos\alpha-8\cos\varphi)^2=(4\sin\gamma-7\sin\beta)^2+(4\cos\gamma-7\cos\beta)^2$

化简得 $2\cos(\alpha-\varphi)=7\cos(\beta-\gamma)$

22. $f(x)=4\cos^3x-3\cos x+4(2\cos^2x-1)+8\cos x=4\cos^3x+8\cos^2x+5\cos x-4=(\cos x+1)(2\cos x+1)^2-5\geqslant-5$

当且仅当 $\cos x=-1$ 或 $\cos x=-\frac{1}{2}$ 时取等号.

23. 当 $x>0$ 时，$\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\frac{\pi}{2}-\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

所以 $\sin\alpha>\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)=\cos\beta>0$

$0<\cos\alpha<\cos(\frac{\pi}{2}-\beta)=\sin\beta$，所以 $0<\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}<1$，$0<\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}<1$

令 $f(x)=\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\right)^x+\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\right)^x$ 则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为单调递减函数.

所以 $f(x)<f(0)=2$

当 $x<0$ 时，同理可证

24. 反证：若 $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$，则 $\sin\alpha>\cos\beta>0$，$\sin\beta>\cos\alpha>0$.

所以 $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}+\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}<2$ 矛盾

若 $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$，则 $0<\sin\alpha<\cos\beta$，$0<\sin\beta<\cos\beta$

所以 $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}>1$，$\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}>1$，

则 $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}+\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}>2$ 矛盾

而当 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ 恰有 $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}+\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}=2$.

所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

25. 因为 $a\cos\theta+b\sin\theta=r\cos(\theta-\alpha)$，$r=\sqrt{a^2+b^2}$

$A\cos2\theta+B\cos2\theta=k\cos2(\theta-\beta)$，$k=\sqrt{A^2+B^2}$

所以 $f(\theta)=1-r\cos(\theta-\alpha)-k\cos2(\theta-\beta)$

取 $\theta=\alpha+\frac{\pi}{4}$，和 $\theta=\alpha-\frac{\pi}{4}$ 分别代入上式，则有：



$f(\alpha+\frac{\pi}{4})=1-\frac{r}{\sqrt{2}}-k\cos2(\alpha-\beta+\frac{\pi}{4})\geqslant 0\cdots\cdots①$

$f(\alpha-\frac{\pi}{4})=1-\frac{r}{\sqrt{2}}-k\cos2(\alpha-\beta-\frac{\pi}{4})=1-\frac{r}{\sqrt{2}}+k\cos2(\alpha-\beta+\frac{\pi}{4})\geqslant 0\cdots\cdots②$

① + ② 得，$2(1-\frac{r}{\sqrt{2}})\geqslant 0$，即 $a^2+b^2\leqslant 2$

取 $\theta=\beta$ 和 $\theta=\beta+\pi$ 代入可得

$f(\beta)=1-r\cos(\beta-\alpha)-k\geqslant 0\cdots\cdots③$

$f(\beta+\pi)=1-r\cos(\beta-\alpha+\pi)-k=1+r\cos(\beta-\alpha)-k\geqslant 0\cdots\cdots④$

③ + ④ 得，$k\leqslant 1$　即 $A^2+B^2\leqslant 1$.

26. 设 $t=\sin x+\cos x$，则 $t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，且 $t\neq\pm 1$

而 $\sin x\cos x=\frac{(\sin x+\cos x)^2-(\sin^2x+\cos^2x)}{2}=\frac{t^2-1}{2}$

这样 $f(x)=\left|\sin x+\cos x+\frac{1}{\sin x\cos x}+\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}\right|$

$=\left|t+\frac{t+1}{\frac{t^2-1}{2}}\right|=\left|t+\frac{2}{t-1}\right|$

$=\left|(t-1)+\frac{2}{t-1}+1\right|$

由于 $t-1\in[-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1]$ 且 $t-1\neq-2,0$，则

$\left|(t-1)+\frac{2}{t-1}+1\right|\geqslant\left|-2\sqrt{(t-1)\cdot\frac{2}{t-1}}+1\right|=|1-2\sqrt{2}|=2\sqrt{2}-1$，

当且仅当 $t-1=-\sqrt{2}$，即 $t=1-\sqrt{2}$ 时取"="。

所以函数 $f(x)$ 的最小值为 $2\sqrt{2}-1$

27. 1) 当 $\cos x=0$ 时，原不等式左边 $=\sin^2x=1\leqslant 1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ＝原不等式右边

2) 当 $\cos x\neq 0$ 时，原不等式 $\Leftrightarrow(\tan x+a)(\tan x+b)\leqslant\left[1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\cdot\sec^2x=\left[1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right](1+\tan^2x)$

$\Leftrightarrow\tan^2x+(a+b)\tan x+ab\leqslant 1+(\frac{a+b}{2})^2+\tan^2x+(\frac{a+b}{2})^2\cdot\tan^2x$

$\Leftrightarrow(\frac{a+b}{2})^2\tan^2x-(a+b)\tan x+1+(\frac{a+b}{2})^2-ab\geqslant 0$

$\Leftrightarrow(\frac{a+b}{2}\tan x-1)^2+(\frac{a-b}{2})^2\geqslant 0$

综上可知，原不等式成立

28. $\cos x\sin y\cos z=\cos x\cdot\frac{\sin(y+z)+\sin(y-z)}{2}\geqslant\frac{1}{2}\cos x\sin(y+z)=\frac{1}{2}\cos^2x$.





由于 $x=\frac{\pi}{2}-(y+z)\leqslant\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$

所以 $\cos x\geqslant\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

即 $\cos x\sin y\cos z\geqslant\frac{1}{2}\cos^2 x\geqslant\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{3}=\frac{1}{8}$

当且仅当 $x=\frac{\pi}{3}$，$y=z=\frac{\pi}{12}$ 时取"="

$$\cos x\sin y\cos z=\cos z\cdot\frac{\sin(y+x)+\sin(y-x)}{2}=\cos z\cdot\frac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{2}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\cos z\sin(x+y)$$

$$=\frac{1}{2}\cos z\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\frac{1}{2}\cos^2 z=\frac{1+\cos 2z}{4}$$

$$\leqslant\frac{1+\cos 2\cdot\frac{\pi}{12}}{4}=\frac{2+\sqrt{3}}{8}.$$

当且仅当 $x=y=\frac{5\pi}{24}$，$z=\frac{\pi}{12}$ 时取"="。

综上所述，$\cos x\sin y\cos z$ 的最小值为 $\frac{1}{8}$，最大值为 $\frac{2+\sqrt{3}}{8}$

29. $y=(9\cos^2 x-12\sin x\cos x+4\sin^2 x)+20\sin x-30\cos x+3$

$=(3\cos x-2\sin x)^2+10(2\sin x-3\cos x)+3$

$=(3\cos x-2\sin x-5)^2-22=(2\sin x-3\cos x+5)^2-22$

$=[\sqrt{13}\sin(x-\varphi)+5]^2-22$，其中 $\tan\varphi=\frac{3}{2}$.

当 $\sin(x-\varphi)=1$ 时，$y_{\max}=(\sqrt{13}+5)^2-22=16+10\sqrt{13}$；

当 $\sin(x-\varphi)=-1$ 时，$y_{\min}=(-\sqrt{13}+5)^2-22=16-10\sqrt{13}$

30. 引入待定的正常数 $k$，$y=\frac{a}{2\sin^2\theta}+\frac{a}{2\sin^2\theta}+3k\sin^2\theta+\frac{b}{2\cos^2\theta}+\frac{b}{2\cos^2\theta}+3k\cos^2\theta-3k\geqslant$

$5\sqrt[5]{\left(\frac{a}{2\sin^2\theta}\right)^2(k\sin^2\theta)^3}+5\sqrt[5]{\left(\frac{b}{2\cos^2\theta}\right)^2(k\cos^2\theta)^3}-3k=5\sqrt[5]{a^2k^3}+5\sqrt[5]{b^2k^3}-3k$，

当且仅当 $\frac{a}{\sin^2\theta}=k\sin^2\theta$ 且 $\frac{b}{\cos^2\theta}=k\cos^2\theta$，即 $\tan^4\theta=\frac{a}{b}\Leftrightarrow\tan\theta=\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$，$\theta=\arctan\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$ 时，上式取等号

故当 $\theta=\arctan\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$ 时，$y$ 取最小值，易求得最小值为 $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2$

31. 令 $t=3+\sin x$，则 $2\leqslant t\leqslant 4$，令 $h(t)=t+\frac{2}{t}$，$t\in[2,4]$

则 $h(t)$ 在 $[2,4]$ 上单调递增



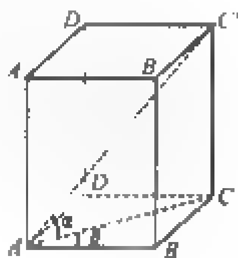
所以 $3\leqslant h(t)\leqslant \frac{9}{2}$

所以 $g(b)=\max\{|h(t)+b-3|\}=\max\{|b|,|b+\frac{3}{2}|\}$.(将 $g_1(b)=h(t)+b-3$ 看成关于 $b$ 的一次函数)

所以 $g(b)\geqslant \frac{1}{2}(|b|+|b+\frac{3}{2}|)\geqslant \frac{1}{2}|b-(b+\frac{3}{2})|=\frac{3}{4}$，且当 $b=-\frac{3}{4}$ 时取“=”

所以 $g(b)_{\min}=\frac{3}{4}$

32. 证明 如图3-1，在对角线为2的长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，设 $AB=a$，$BC=b$，$BB'=c$，$\angle C'AC=\alpha$，$\angle CAB=\beta$，则 $a^2+b^2+c^2=2^2=4$，$c=CC'=2\sin\alpha$，$AC=2\cos\alpha$，$a=AC\cos\beta=2\cos\alpha\cos\beta$，$b=AC\sin\beta=2\cos\alpha\sin\beta$，所以此长方体的体积 $V=abc=2\cos\alpha\sin2\alpha\sin2\beta$.



3-1

$V=abc\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{1}{27}[(a+b+c)^2]^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{27}[a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)]^{\frac{3}{2}}\leqslant\frac{1}{27}[3(a^2+b^2+c^2)]^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{27}(3\times4)^{\frac{3}{2}}=\frac{8\sqrt{3}}{9}$.

当且仅当 $a=b=c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，$V=\frac{8\sqrt{3}}{9}$

所以 $V_{\max}=\frac{8\sqrt{3}}{9}$.

则 $\cos\alpha\sin2\alpha\sin2\beta=\frac{V}{2}\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}$

33. 由于 $\cot\beta\cot\gamma=\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\cdot\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}=\frac{\cos\gamma}{\sin\beta}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\beta}+\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\gamma}\right)$

同理，$\cot\gamma\cot\alpha\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\gamma}+\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\alpha}\right)$，$\cot\alpha\cot\beta\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}\right)$

故 $\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha+\cot\alpha\cot\beta\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\beta}+\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\gamma}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\gamma}+\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\gamma+\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}+\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}{\sin^2\gamma}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{1-\cos^2\beta}{\sin^2\beta}+\frac{1-\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma}\right)=\frac{3}{2}$

34. 反证，假设 $\cos1^\circ\in\mathbf{Q}$，则 $\cos2^\circ=2\cos^2 1^\circ-1\in\mathbf{Q}$.

假设 $\cos(k-1)^\circ$，$\cos k^\circ\in\mathbf{Q}$，则由于 $\cos(k+1)^\circ+\cos(k-1)^\circ=2\cos k^\circ\cos1^\circ$，那么 $\cos(k+1)^\circ\in\mathbf{Q}$.

这样由数学归纳法可知，对于 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，均有 $\cos n^\circ\in\mathbf{Q}$，而 $\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\notin\mathbf{Q}$ 矛盾

所以 $\cos1^\circ\notin\mathbf{Q}$.

35. 设 $\alpha$ 是 $f(x)=0$ 与 $f(f(x))=0$ 的公共实根，则 $f(\alpha)=0$，且 $f(f(\alpha))=f^2(\alpha)+a\cdot f(\alpha)+b\cos(f(\alpha))=b=0$，从而 $f(x)=x^2+ax$



1) 当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2$，$f(x)=0$ 的解集为{0}，$f(f(x))=f(x^2)=x^4=0$ 的解集为{0}

所以 $a=0$ 时满足题意

2) 当 $a\neq 0$ 时，$f(x)=0$ 的解集为 $\{0,-a\}$，而 $f[f(x)]=(x^2+ax)^2+a(x^2+ax)=0\Leftrightarrow(x^2+ax)(x^2+ax+a)=0$.

所以 $\{x\mid x^2+ax+a=0\}\subseteq\{0,-a\}$.

而由 $0^2+0\cdot a+a=0$，则 $a=0$ 矛盾

由 $(-a)^2+a\cdot(-a)+a=0$，则 $a=0$ 矛盾

所以方程 $x^2+ax+a=0$ 无实数根，所以 $\Delta=a^2-4a<0\Leftrightarrow 0<a<4$.

则 $0\leqslant a<4$

综上可知，所有实数对构成的集合为 $\{(a,b)\mid 0\leqslant a<4, b=0\}$

36 设 $A_n=\cos nx+\cos ny$，由于 $\{A_n\mid n\in\mathbf{N}^*\}$ 为一个有限集，故有序三元组 $(A_{n-2},A_{n-1},A_n)$ 至多只有有限组是两两不同的，于是，存在正整数 $m,n$，$m>n>2$，使得 $(A_{n-2},A_{n-1},A_n)=(A_{m-2},A_{m-1},A_m)$

而 $A_{n-2}+A_n=[\cos(n-2)x+\cos nx]+[\cos(n-2)y+\cos ny]$

$=2\cos(n-1)x\cos x+2\cos(n-1)y\cos y$

$=[\cos(n-1)x+\cos(n-1)y](\cos x+\cos y)+[\cos(n-1)x-\cos(n-1)y](\cos x-\cos y)$

$=A_{n-1}(\cos x+\cos y)+[\cos(n-1)x-\cos(n-1)y](\cos x-\cos y)$

又由于 $A_{n-2}=A_{m-2}$，$A_{n-1}=A_{m-1}$，$A_n=A_m$

所以 $\begin{cases}A_{n-1}=A_{m-1}\\ A_{n-2}+A_n=A_{m-2}+A_m\end{cases}$ 故有：

$\cos(n-1)x+\cos(n-1)y=\cos(m-1)x+\cos(m-1)y$ ……①

$[\cos(n-1)x-\cos(n-1)y](\cos x-\cos y)=[\cos(m-1)x-\cos(m-1)y](\cos x-\cos y)$ ……②

若 $\cos x-\cos y=0$，则 $x=2k\pi\pm y$，代入①得

$2\cos(n-1)x=2\cos(m-1)x$，所以 $(n-1)x=2k\pi\pm(m-1)x$

所以 $x$ 为 $\pi$ 的有理数倍，所以 $y$ 也为 $\pi$ 的有理数倍.

若 $\cos x-\cos y\neq 0$，则 $\cos(n-1)x-\cos(n-1)y=\cos(m-1)x-\cos(m-1)y$ ……③

由①、②可知：$\begin{cases}\cos(n-1)x=\cos(m-1)x\\ \cos(n-1)y=\cos(m-1)y\end{cases}$

所以 $x,y$ 也为 $\pi$ 的有理数倍

综上可知原命题得证

37 原方程 $\Leftrightarrow[\cos\pi(a-x)-1]^2+\left[\cos\frac{3\pi}{2a}x\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2a}+\frac{\pi}{3}\right)+1\right]=0$

$\Leftrightarrow[\cos\pi(a-x)-1]^2+\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{a}x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi x}{a}-\frac{\pi}{3}\right)+2\right]=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\pi(a-x)=1\\ \cos\left(\frac{2\pi}{a}x+\frac{\pi}{3}\right)=-1\\ \cos\left(\frac{\pi x}{a}-\frac{\pi}{3}\right)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-x=2k_1\text{……①}\\ \frac{2x}{a}+\frac{1}{3}=2k_2-1,k_i\in\mathbf{Z}\text{ ②}\\ \frac{x}{a}-\frac{1}{3}=2k_3-1\text{……③}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a-x=2k_1 \cdots\cdots ① \\ (3k_2-2)\cdot a=3x\cdots\cdots ② \\ 3x-a=3a(2k_3-1)\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

由①可知 由于 $a\in \mathbf{N}^*$,所以 $x\in \mathbf{Z}$ 且 $x$、$a$ 同奇偶

由②式可知,$a$ 为 3 的倍数.

若 $x$、$a$ 同奇代入③矛盾,所以 $x$、$a$ 同偶

所以 $a$ 为 6 的倍数,又因为 $a\in \mathbf{N}^*$,所以 $a\geqslant 6$.

而当 $a=6$ 时,$x=8$ 是其一个实数解 所以 $a_{\min}=6$.

注 1:若方程改为:

$$\cos^2\pi(a-x)-2\cos\pi(a-x)+\cos\frac{3\pi x}{2a}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2a}+\frac{\pi}{3}\right)+2=0$$

同上方法可得 $a_{\min}=3$,此时 $x=4$ 为其一个实解.

注 2:在化简 $\cos\frac{3\pi}{2a}x\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2a}+\frac{\pi}{3}\right)+1=0$ 时,可令 $\theta=\frac{\pi x}{2a}+\frac{\pi}{3}$,则 $3\theta=\frac{3\pi x}{2a}+\pi$.

则方程 $\Leftrightarrow\cos(3\theta-\pi)\cdot\cos\theta+1=0\Leftrightarrow\cos3\theta\cos\theta-1=0\Leftrightarrow(4\cos^3\theta-3\cos\theta)\cos\theta-1=0\Leftrightarrow(\cos^2\theta-1)(4\cos^2\theta+1)=0\Leftrightarrow\cos^2\theta=1$.

38. 一方面 $S\leqslant\sqrt{3\left[\left(3\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+1\right)+\left(3\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+1\right)+\left(3\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+1\right)\right]}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}<5$

另一方面 当 $0<x<1$ 时有 $x(1-x)>0\Leftrightarrow x^2+2x+1<3x+1\Leftrightarrow\sqrt{3x+1}>x+1$.

故 $S>\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+1\right)+\left(\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+1\right)+\left(\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+1\right)=4$

所以$[S]=4$.

39. 由于命题关于 $A$、$B$、$C$ 完全对称,不妨设 $A\geqslant B\geqslant C$,则由 $b+c>a$ 及正弦定理可知 $\sin B+\sin C>\sin A$

即 $2\sin A<\sin A+\sin B+\sin C\leqslant 1$

故 $\sin A<\frac{1}{2}$

又因为 $A\geqslant\frac{A+B+C}{3}=60^\circ$

所以 $A>150^\circ$,即 $B+C<30^\circ$

则 $\min\{A+B,B+C,C+A\}<30^\circ$

40. 因为 $0<\cos\frac{C}{2}<1$,$0<\cos\frac{B}{2}<1$,

所以 $\cos\frac{C}{2}>\cos^2\frac{C}{2}$,$\cos\frac{B}{2}>\cos^2\frac{B}{2}$,

注意到 $b\cos C+c\cos B=a$,所以 $2b\cos\frac{C}{2}+2c\cos\frac{B}{2}>b\left(2\cos^2\frac{C}{2}\right)+c\left(2\cos^2\frac{B}{2}\right)=b(1+\cos C)+c(1+\cos B)=b+c+(b\cos C+c\cos B)=a+b+c$.





即 $2b\cos\frac{C}{2}+2c\cos\frac{B}{2}>a+b+c$

41. (1) 因为 $\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}=2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>0$，

所以 $\cos\frac{B-C}{2}>\sin\frac{A}{2}$，

则 $\cos^2A+\cos B+\cos C=\cos^2A+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}>\cos^2A+2\sin^2\frac{A}{2}$

$=(1-2\sin^2\frac{A}{2})^2+2\sin^2\frac{A}{2}=4(\sin^2\frac{A}{2}-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$，

所以 $\cos^2A+\cos B+\cos C>\frac{3}{4}$

(2) 因为 $\cos A+\cos(B-C)=2\sin B\sin C>0$，

所以 $\cos A>-\cos(B-C)$，

则 $\cos A+\cos^2B+\cos^2C=\cos A+\frac{1}{2}(2+\cos 2B+\cos 2C)=1+\cos A[1-\cos(B-C)]$

$>1-\cos(B-C)[1-\cos(B-C)]=[\cos(B-C)-\frac{1}{2}]^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$，

所以 $\cos A+\cos^2B+\cos^2C>\frac{3}{4}$。

42. $\cos^2A+\lambda(\sin 2B+\sin 2C)=\cos^2A+2\lambda\sin A\cos(B-C)=-[\sin A-\lambda\cos(B-C)]^2+1+\lambda^2\cos^2(B-C)\leqslant 1+\lambda^2$；

$\sin^2A+\lambda(\cos 2B+\cos 2C)=\sin^2A-2\lambda\cos A\cos(B-C)=-[\cos A+\lambda\cos(B-C)]^2+1+\lambda^2\cos^2(B-C)\leqslant 1+\lambda^2$

43. 证　因为 $\cos B\cos C=\frac{1}{2}[\cos(B+C)+\cos(B-C)]\leqslant\frac{1}{2}[\cos(B+C)+1]=\cos^2\frac{B+C}{2}$

$=\sin^2\frac{A}{2}$，所以 $\cos B\cos C\sin^n\frac{A}{2}\leqslant\sin^{n+2}\frac{A}{2}$。

同理　$\cos C\cos A\sin^n\frac{B}{2}\leqslant\sin^{n+2}\frac{B}{2}$，

$\cos A\cos B\sin^n\frac{C}{2}\leqslant\sin^{n+2}\frac{C}{2}$

三式相加，得

$\cos B\cos C\sin^n\frac{A}{2}+\cos C\cos A\sin^n\frac{B}{2}+\cos A\cos B\sin^n\frac{C}{2}\leqslant\sin^{n+2}\frac{A}{2}+\sin^{n+2}\frac{B}{2}+\sin^{n+2}\frac{C}{2}\leqslant\sin^2\frac{A}{2}$ $+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-\frac{r}{2R}<1$（其中 $R$，$r$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径和内切圆半径，

44. 证　因为 $(1-\sin^2x)(1-\sin^2y)(1-\sin^2z)\geqslant 0$

上式左边展开，得

$1-\sin^2x\sin^2y\sin^2z\geqslant\sin^2x(1-\sin^2y)+\sin^2y(1-\sin^2z)+\sin^2z(1-\sin^2x)$

$=\sin^2x\cos^2y+\sin^2y\cos^2z+\sin^2z\cos^2x$



故 $\sin^2 x\cos^2 y+\sin^2 y\cos^2 z+\sin^2 z\cos^2 x\leqslant 1$

当 $m,n\geqslant 2$ 时，显然

$\sin^m x\cos^n y+\sin^m y\cos^n z+\sin^m z\cos^n x\leqslant \sin^2 x\cos^2 y+\sin^2 y\cos^2 z+\sin^2 z\cos^2 x\leqslant 1$

所以原不等式成立，令 $x=\frac{\pi}{2}$，$y=z=0$，则不等式取等号，即 1 是最小上界

45. 下面证明"若 $\triangle ABC$ 是钝角三角形，则 $\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2C}<\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}$"

因为 $\triangle ABC$ 是钝角三角形，$\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2C}$ 和 $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}$ 关于 $A$、$B$、$C$ 对称，所以不妨设角 $C$ 为钝角，且角 $A$ 不小于角 $B$，所以 $\pi<2C<2\pi$，$0\leqslant A-B<\frac{\pi}{2}$，$0<A+B<\frac{\pi}{2}$，$0<B<\frac{\pi}{4}$，

所以 $\sin C>0$，$\sin 2C<0$，$\sin(A-B)\geqslant 0$，$\cos(A+B)>0$，$\cos B>\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin 2A>0$，$\sin 2B>0$，$\cos A>\sin B$，所以 $\frac{1}{\sin 2C}<\frac{1}{\sin C}$，……①

$\sin 2A-\sin 2B=2\sin(A-B)\cos(A+B)\geqslant 0$，$\sin 2A\geqslant\sin 2B$，

又因为

$$\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\right)-\left(\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2B}\right)=\left(\frac{1}{\sin A}-\frac{1}{\sin 2A}\right)+\left(\frac{1}{\sin B}-\frac{1}{\sin 2B}\right)$$

$$=\frac{\sin 2B(2\cos A-1)+\sin 2A(2\cos B-1)}{\sin 2A\sin 2B}$$

$$\geqslant\frac{\sin 2B(2\cos A-1)+\sin 2B(2\cos B-1)}{\sin 2A\sin 2B}$$

$$=\frac{2\sin 2B(\cos A+\cos B-1)}{\sin 2A\sin 2B}$$

而 $\cos A+\cos B>\sin B+\cos B=\sqrt{2}\sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right)>1$

所以 $\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\right)-\left(\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2B}\right)>0$，即 $\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2B}<\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}$，……②

由①②式得，$\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2C}<\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}$

"若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，则 $\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2C}\geqslant\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}$"

事实上，

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=\frac{4(\sin B\sin C+\sin C\sin A+\sin A\sin B)}{\sin 2C+\sin 2B+\sin 2A}$$

$$=\frac{4(\sin B\sin C+\sin C\sin A+\sin A\sin B)}{(\sin 2C+\sin 2B+\sin 2A)\left(\frac{1}{\sin 2C}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2A}\right)}\cdot\left(\frac{1}{\sin 2C}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2A}\right)$$





$$\leqslant \frac{4(\sin B\sin C+\sin C\sin A+\sin A\sin B)}{3\sqrt[3]{\sin 2C\cdot\sin 2B\cdot\sin 2A}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin 2C}\cdot\frac{1}{\sin 2B}\cdot\frac{1}{\sin 2A}}}\cdot\left(\frac{1}{\sin 2C}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2A}\right)$$

$$=\frac{4(\sin B\sin C+\sin C\sin A+\sin A\sin B)}{9}\cdot\left(\frac{1}{\sin 2C}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2A}\right)$$

$$=\frac{4}{27}(\sin B\sin C+\sin C\sin A+\sin A\sin B+2\sin B\sin C+2\sin C\sin A+2\sin A\sin B)$$

$$\cdot\left(\frac{1}{\sin 2C}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2A}\right)$$

$$\leqslant\frac{4}{27}(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C+2\sin B\sin C+2\sin C\sin A+2\sin A\sin B)\cdot\left(\frac{1}{\sin 2C}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2A}\right)$$

$$=\frac{4(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{27}\cdot\left(\frac{1}{\sin 2C}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2A}\right)$$

$$\leqslant\frac{4\left(3\sin\frac{A+B+C}{3}\right)^2}{27}\cdot\left(\frac{1}{\sin 2C}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2A}\right)$$

$$=\frac{1}{\sin 2C}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2A}.$$

46.(1) 证明　不妨设 $C$ 为钝角，则 $C>\frac{\pi}{2}$，则 $0<\sin C<1$，$\cos C<0$，于是

$\sin A\sin B\sin C<\sin A\sin B=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]\leqslant\frac{1}{2}(1+\cos C)<\frac{1}{2}$.

(2)(引理)：对钝角三角形 $ABC$，有

$0<\sin A+\sin B+\sin C<1+\sqrt{2}$.

事实上，不妨设 $A>\frac{\pi}{2}$，则 $0<\sin A<1$，$0<\cos\frac{A}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $0<\sin A+\sin B+\sin C<1+2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=1+2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}<1+\sqrt{2}$，问题解决；

设 $a$、$b$、$c$ 是三角形 $ABC$ 的角 $A$、$B$、$C$ 的对边，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，$R$、$r$、$S_\triangle$ 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径、内切圆半径与三角形的面积，则 $S_\triangle=\frac{abc}{4R}$，$p=R(\sin A+\sin B+\sin C)$，$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$，$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}$，$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$.

当三角形 $ABC$ 为钝角三角形时，有 $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc}=\frac{p\cdot S_\triangle}{abc}=\frac{p}{4R}=\frac{1}{4}(\sin A+\sin B+\sin C)<\frac{1+\sqrt{2}}{4}$.

47. 因为 $a^2\cos A=a^2\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2abc}\cdot a^3\cdot(b^2+c^2-a^2)$

所以原不等式 $\Leftrightarrow\frac{1}{2abc}[a^3(b^2+c^2-a^2)+b^3(a^2+c^2-b^2)+c^3(a^2+b^2-c^2)]\leqslant\frac{3}{2}abc$



$\Leftrightarrow a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)\leqslant 3a^2b^2c^2\cdots\cdots①$

令 $x=b^2+c^2-a^2, y=a^2+c^2-b^2, z=a^2+b^2-c^2$.

则 $a^2=\frac{y+z}{2}, b^2=\frac{z+x}{2}, c^2=\frac{x+y}{2}$, 且 $x,y,z$ 中至多1个数 $\leqslant 0$.

$①\Leftrightarrow x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2\leqslant\frac{3}{2}(y+z)(z+x)(x+y)$

$\Leftrightarrow x^2y+x^2z+y^2z+y^2z+y^2x+z^2x+z^2y\geqslant 6xyz\cdots\cdots②$

1) 若 $x,y,z>0$, 则②式的右端 $\geqslant 6\sqrt[6]{x^2y\cdot x^2z\cdot y^2z\cdot y^2x\cdot z^2x\cdot z^2y}=6xyz$.

②式得证.

2) 若 $x,y,z$ 中恰一个不大于0, 由于对称性, 不妨设 $x\leqslant 0, y>0, z>0$.

则②式左端 $=x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=2x^2a^2+2y^2b^2+2z^2c^2>0>6xyz$

此时②式也得证.

综上可知原不等式成立.

48. 证明:因为 $\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{C-A}{2}+\cos\frac{A-B}{2}$

$=\frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)^2-3\right]$

$\leqslant\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\right]\cdots\cdots①$

$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)^2-\frac{3}{8}$

令 $t=\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$, 则 $t\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots②$

只需证: $t\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{3}{8}\right)$, 即 $t^2-\frac{4}{\sqrt{3}}t-\frac{3}{4}\leqslant 0$

令 $f(t)=t^2-\frac{4\sqrt{3}}{3}t-\frac{3}{4}, 2<t\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 则 $f(t)=\left(t+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\left(t-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

所以 $f(t)\leqslant 0$.

49. 证明　由正弦定理, 不等式等价于 $\left|\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}-\frac{3}{2}\right|<\frac{8\sqrt{2}-5\sqrt{5}}{6}$.

设 $M=\left|\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}-\frac{3}{2}\right|$.

则 $M=\left|\frac{a}{a+b}-\frac{1}{2}+\frac{b}{b+c}-\frac{1}{2}+\frac{c}{c+a}-\frac{1}{2}\right|$

$=\frac{1}{2}\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{(a-b)}{(a+b)}\frac{(b-c)}{(b+c)}\frac{(c-a)}{(c+a)}\right|$.

不妨设　$a\geqslant b\geqslant c$.

则　$2M=\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

设　$a=z+y, b=z+x, c=x+y$.





则　$z \geqslant y \geqslant x > 0$，

$$2M = \frac{(z-y)(z-x)(y-x)}{(2x+y+z)(2y+x+z)(2z+x+y)}$$

$$< \frac{(z-y)zy}{(y+z)(2y+z)(2z+y)}$$

$$= \frac{(s+y)sy}{(2y-s)(3y+s)(3y+2s)}(z=1+s, y>0, s>0)$$

$$= \frac{k(1+k)}{(2k+1)(3k+1)(3k+2)}\left(\frac{y}{s}=k>0\right).$$

取　$F = \frac{1}{2M}$.

则　$F = \frac{(2k+1)(3k+1)(3k+2)}{k(k+1)} = 9 + 2\left(9k + \frac{2k+1}{k^2+k}\right)$

$$= 9 + 2\left(9k + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right).$$

要求 $M$ 的最大值，只要求 $F$ 的最小值，亦即求

$W(k) = 9k + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$ 的最小值.

由　$W(k) = 9k + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$，求导数得

$W'(k) = 9 - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$

令　$W'(k) = 0$，则 $\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} = 9$.

取　$t = k + \frac{1}{2}\left(t > \frac{1}{2}\right)$.

又则　$9 = \frac{[t-\frac{1}{2}]^2 + [t-\frac{1}{2}]^2}{[t-\frac{1}{2}]^2 \cdot [t+\frac{1}{2}]^2}$

整理得　$144t^4 - 104t^2 + 1 = 0$，所以 $t^2 = \frac{13 \pm 4\sqrt{10}}{36}$.

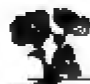
因为 $t > \frac{1}{2}$，所以 $t^2 = \frac{13+4\sqrt{10}}{36}$.

所以 $t = \frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{6}$.

所以 $k = \frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{2}$ 是 $W(k)$ 在 $(0, +\infty)$ 上唯一驻点.

由问题实际意义知：

当 $k = \frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}-3}{6}$ 时，$W(k)$ 取最小值，从而 $M$ 取最大值.



又 $k(k+1)=\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}-3}{6}\cdot\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}-3}{6}=\frac{\sqrt{10}+1}{9}$，$\frac{1}{2k+1}=2\sqrt{2}-\sqrt{5}$，

$(3k+1)(3k+2)=\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}+1}{2}=\frac{(\sqrt{5}+2\sqrt{2})^2-1}{4}=\sqrt{10}+3$，

从而 $\quad\frac{1}{(3k+1)(3k+2)}=\sqrt{10}-3$.

所以 $M\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{k(k+1)}{(2k+1)(3k+1)(3k+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}+1}{9}(2\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{10}-3)=$
$\frac{7-2\sqrt{10}}{18}(2\sqrt{2}-\sqrt{5})=\frac{8\sqrt{2}-5\sqrt{5}}{6}$，

即 $\quad M\leqslant\frac{8\sqrt{2}-5\sqrt{5}}{6}$（等号在 $x\to0$ 且 $k=\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}-3}{6}$ 时取得），由 $x\neq0$，故 $M<\frac{8\sqrt{2}-5\sqrt{5}}{6}$，

则 $\left|\frac{\sin A}{\sin A+\sin B}+\frac{\sin B}{\sin B+\sin C}+\frac{\sin C}{\sin C+\sin A}-\frac{3}{2}\right|$ 的最小上界 $m=\frac{8\sqrt{2}-5\sqrt{5}}{6}$.



